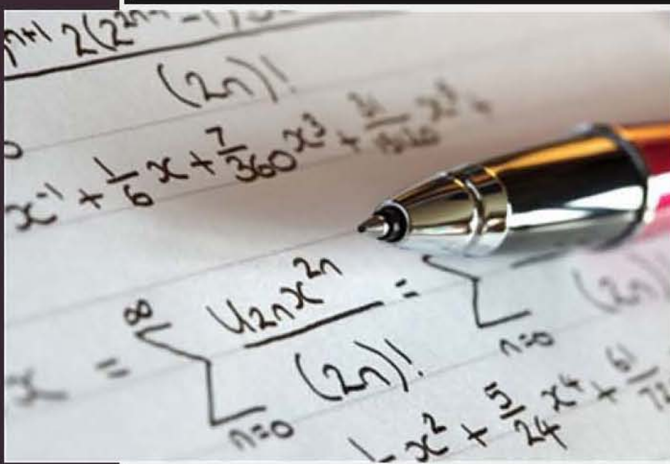
П. В. ЧУЛКОВ

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ ПО ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКЕ

(2-й курс)



Издательство Прометей

Москва
2012

П. В. Чулков

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ ПО ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКЕ

(2-й курс)

Издательство Прометей

Москва
2012

УДК 512.1(076.5)
ББК 22.141я73-6
Ч893

Рецензенты:

В. А. Смирнов, зав кафедрой элементарной математики математического факультета МПГУ, д-р физ.-мат. наук, профессор

А. В. Шевкин, учитель математики ГБОУ СОШ № 2007, г. Москва, канд. пед. наук

Ч893 **Чулков П. В.** Практические занятия по элементарной математике (2-й курс): Учебное пособие. – М.: МПГУ, 2012. – 102 с.

В учебном пособии представлены материалы по арифметике (четность, делимость), логике, простейшим алгоритмам, теории информации, наглядной геометрии и многое другое.

Пособие предназначено для студентов математических специальностей педагогических университетов и институтов, учителей математики, а также для руководителей математических кружков. Материалы пособия можно использовать для организации работы математических кружков, факультативов.

Печатается по решению Ученого совета математического факультета Московского педагогического государственного университета.

ISBN 978-5-4263-0121-4

Содержание

Введение

Настоящее пособие предназначено для студентов математических специальностей педагогических университетов и институтов, учителей математики, а также руководителей математических кружков. Материалы пособия можно использовать для организации работы математических кружков, факультативов.

В основу пособия положены материалы практических занятий, которые на протяжении ряда лет ведутся автором на математическом факультете Московского педагогического государственного университета.

Тематика занятий примыкает к так называемой «олимпиадной» математике, знакомство с которой является важным элементом подготовки учителя математики.

В пособии представлены материалы по арифметике (четность, делимость), логике, простейшим алгоритмам, теории информации, наглядной геометрии и многое другое.

Материал распределен на 36 занятий, в каждом занятии от 18 до 24 задач, всего более 350 задач. Задачи предназначены для самостоятельного решения. Тем не менее к 2–3 задачам каждого занятия даны решения, решения остальных задач можно найти в литературе, а также на сайте www.problems.ru (и других).

Представленных материалов должно хватить для первого знакомства, которое можно продолжить, изучив литературу из списка, представленного в пособии (включены издания последних лет выпуска).

Автор будет благодарен за любые замечания, которые могли бы способствовать улучшению качества пособия и просит присылать их по адресу chulkov2007@yandex.ru

Занятие 1. Ситуативная логика

1.1. Федя всегда говорит правду, а Саша всегда врет. Им задали один и тот же вопрос, а они дали на него один и тот же ответ. Могло ли так быть?

1.2. Два путешественника подошли к реке. К берегу была привязана лодка, вмещающая одного человека. И, тем не менее, они переправились, не намокнув. Как это возможно?

1.3. Покупатели говорят с продавцом.

– Дайте мне 11, – просит первый покупатель.

– С вас 10 рублей, – отвечает продавец.

– Дайте мне 5, – просит второй.

– С вас 5 рублей, – отвечает продавец.

– Дайте мне 128, – просит третий.

– С вас 15 рублей, – отвечает продавец.

Что продается?

1.4. Ручаюсь, – сказал продавец зоомагазина, – что этот попугай будет повторять каждое услышанное им слово. Обрадованный покупатель приобрел чудо-птицу, но вскоре обнаружил, что попугай «нем как рыба». Тем не менее, прода-вец не лгал. Проясните ситуацию.

1.5. История произошла в XIX в. Английский офицер, вернувшийся из Китая, заснул в церкви во время службы. Ему приснилось, что к нему приближается палач, чтобы отрубить голову, и в тот самый момент, когда сабля опускалась на шею несчастного, его жена, желая разбудить заснувшего, слегка дотронулась до его шеи веером. Потрясение было столь велико, что офицер тут же умер. В этой истории что-то не так. Что именно?

1.6. Математик, оказавшись в небольшом городке, решил подстричься. В городке было лишь две парикмахерские. Заглянув к одному мастеру, он увидел, что в салоне грязно, мастер одет неряшливо, плохо выбрит и небрежно подстрижен. В салоне другого мастера было чисто, а владелец его был безукоризненно одет, чисто выбрит и аккуратно подстрижен. Тем не менее, математик отправился стричься к первому па-рикмахеру. Почему?

1.7. Посетитель ресторана обнаружил муху в чашке кофе и, подозвав официанта, потребовал заменить ее. Едва пригубив принесенную чашку, посетитель вне себя от ярости воскликнул: «Но это та же чашка!» Как он это понял?

1.8. Учитель показал листок бумаги ученику и спросил: «Сколько здесь точек?» – «Пять», – ответил ученик. «Правильно», – сказал учитель. После этого он передал тот же листок другому ученику и спросил: «Сколько здесь точек?» – «Семь», – ответил ученик. «Правильно», – сказал учитель. Проясните ситуацию.

1.9. Остап Бендер решил дать сеанс одновременной игры Карпову и Каспарову. Один из них должен играть белыми, а другой – черными. Остап уверен, что он или сведет вничью обе партии, или одну выиграет. Возможно ли такое?

1.10. (Старинная задача) Три человека пообедали, заплатили 30 руб. (по 10 руб. за каждого) и ушли. Через некоторое время повар заметил, что обсчитал их на 5 руб., и послал поваренка отдать их. Поваренок отдал 3 руб. (по 1 руб. на каждого), а 2 руб. забрал себе. Три раза по 9 руб. и 2 руб. у поваренка, получается 29 руб. Куда пропал рубль?

1.11. Банкир шел по улице маленького провинциального городка, как вдруг увидел на мостовой банкноту в 5 долларов. Он поднял ее, запомнил номер и пошел домой завтракать. За завтраком жена сообщила ему, что мясник прислал счет на 5 долларов. Поскольку других денег у банкира при себе не было, он отдал жене найденную банкноту, чтобы оплатить счет. Мясник отдал эту банкноту фермеру, когда покупал теленка, тот торговцу, торговец, в свою очередь, дал ее прачке, а прачка, вспомнив, что задолжала банку 5 долларов, отнесла ее туда и погасила свой долг. Банкир узнал банкноту, которой к тому времени было оплачено долгов на 25 долларов. Через некоторое время выяснилось, что банкнота фальшивая. Кто и сколько потерял на всех этих операциях?

1.12. Шпион собрался проникнуть в расположение врага. Перед этим он спрятался в кустах недалеко от контрольного пункта. Вот, что ему удалось подслушать. Часовой, обращаясь к посетителю, называет число:

– Двадцать шесть.

Подумав, посетитель отвечает:

– Тринадцать, – и часовой его пропускает.

Диалог с другим посетителем:

– Двадцать два, – говорит часовой.

– Одиннадцать, – и часовой его тоже пропускает.

«Ага! – догадался шпион, – секрет в том, называемое число требуется разделить на 2»,– и уверенно подошел к охране:

– Сто, – сказал часовой.

– Пятьдесят, – ответил шпион, после чего был задержан охраной.

В чем секрет пароля?

1.13. Три бегуна соревновались в беге на 100 м. По окончании сезона выяснилось, что в большинстве забегов Андрей опередил Васю, Вася в большинстве забегов опередил Сашу, а Саша в большинстве забегов опередил Андрея. Могло ли так быть?

1.14. Одного человека приговорили к казни. В приговоре было сказано, что казнь должна состояться, не позднее чем через 7 дней, но приговоренный должен узнать о дне казни лишь за сутки. Услышав это, преступник пришел к заключению, что казнь состоять не может. В самом деле, если начинать отсчет с понедельника, то в воскресенье казнь состояться не может, потому что уже в пятницу приговоренный будет знать об этом. Аналогично она не может состояться в субботу, пятницу, четверг и так далее. Правильны ли его рассужде-ния?

1.15. Однажды в караван-сарае встретились три погонщика, причем двое из них смертельно ненавидели третьего. Не сговариваясь друг с другом, они решили его убить. Ночью один из погонщиков встал и подлил в бурдюк с водой яд. Затем проснулся второй погонщик и проделал в его бурдюке дырку, в результате чего вся вода постепенно вытекла, и третий погонщик умер от жажды. Кто виноват в его смерти?

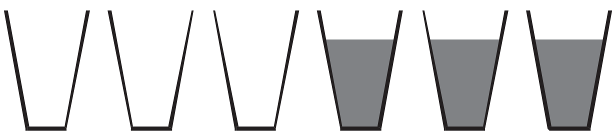
1.16. Солдату приказали брить всех солдат, кроме тех, кто бреется сам. Что Вы об этом думаете?

1.17. Три черепахи ползут по дорожке друг за другом. Первая говорит: «Сзади меня ползут две черепахи». Вторая говорит: «Впереди меня ползет одна черепаха и сзади одна». Третья говорит: «Впереди меня ползет одна черепаха и сзади одна». Проясните ситуацию.

1.18. В Анчурии и Гвайясуэле денежная единица именуется долларом, и в обеих странах первоначально все доллары котировались одинаково. Однажды правительство Гвайясуэлы постановило впредь приравнять анчурийский доллар к девяноста гвайясуэльским центам. На следующий день подобный курс был введен для гвайясуэльского доллара в Анчурии. В Анчурии, вблизи границы живет человек, который приходит в трактир выпить кружку пива за 10 центов. Любитель пива уплачивает анчурийский доллар и получает сдачу гвайасуэльский. Затем он переходит границу, покупает кружку пива, расплачивается гвайасуэльским долларом и получает взамен анчурийский. Вернувшись, он оказывается при своих деньгах. Кто платит за пиво?

Занятие 2. Затруднительные ситуации

2.1. На столе стоят в ряд шесть стаканов: три пустых и три с кофе. Их нужно расположить так, чтобы пустые стаканы чередовались с наполненными стаканами. Как это сделать, если брать в руки разрешается только один стакан?



2.2. Предположим, что если человек не будет 7 суток есть или 7 суток спать, то он умрет. Пусть человек неделю не ел и не спал. Посоветуйте, что он должен сделать в первую очередь к концу седьмых суток: поесть или поспать, чтобы остаться в живых?

2.3. Два разбойника делят добычу. Каждый из них уверен, что он мог бы поделить добычу на две равные части, но второй ему не доверяет. Как разбойникам разделить добычу, чтобы оба остались довольны?

2.4. Путешественник попал в плен к кровожадным дикарям. По законам племени, всякого иноземца спрашивают о цели визита. Если он при этом скажет правду, – его съедят, а если солжет, – утопят в море. Как путешественнику остаться в живых?

2.5. Больному требуется принять за два приема две таблетки лекарства A и две таблетки лекарства B, которые выглядят совершенно одинаково. Трудность в том, что таблетки перепутались, а выглядят совершенно одинаково. Принимать их необходимо одновременно. Подскажите больному, как поступить, чтобы не нарушить предписаний врача.

2.6. На столе лежат 100 монет, среди них 6 монет лежат гербом вверх. Вам завязывали глаза и просят разделить все монеты на две группы, в которых число монет гербом вверх одинаково. При этом вы можете некоторые монеты перевернуть. Как это сделать?

2.7. Король решил уволить в отставку своего министра, но не хотел его обижать, да и повода не было. Наконец он придумал вот что. Однажды, когда министр пришел к королю, тот сказал: «В портфель я положил два листа бумаги. На одном из них написано «*Останьтесь*», на другом – «*Уходите*». Листок, который Вы, не глядя, вытяните из портфеля, решит Вашу судьбу». Министр догадался, что на обоих листках написано «*Уходите*». Помогите ему избежать отставки.

2.8. Старый жадный богач заказал у бедного художника свой портрет, но заказ забирать отказался. «Это не я, а какой-то шут гороховый», – сказал он и не заплатил ни копейки. Однако через неделю он сам пришел к художнику и выкупил портрет втридорога. Как художник этого добился?

2.9. В гостиницу приехал путешественник. Денег он не имел, а обладал лишь серебряной цепочкой, состоящей из 6 звеньев. За каждый день пребывания в гостинице он расплачивался одним звеном цепочки, при этом хозяин предупредил, что согласен взять не более одного распиленного звена. Как путешественнику распилить цепочку, чтобы иметь возможность ежедневно расплачиваться с хозяином? Как изменится ответ, если в цепочке будет 7 звеньев?

2.10. Можно ли так бросить мяч, чтобы он, пролетев некоторое расстояние, остановился и начал двигаться в обратном направлении?

2.11. На почте имеются конверты в пачках по 100 штук в каждой. За 5 секунд продавец может отсчитать 5 конвертов. Ему требуется отсчитать 90 конвертов. За какое время он этот сделает?

2.12. На столе лежат четыре карточки, на верхней стороне которых написано А, Б, 4, 5. Какое наименьшее количество карточек требуется перевернуть, чтобы убедиться в истинности утверждения: «Если на одной стороне гласная, то на другой – четное число»?

2.13. Согласно легенде царь обещал изобретателю шахмат Сете дать зерна столько, сколько тот пожелает. Сета же попросил в награду столько пшеничных зерен, сколько получится, если на первую клетку доски положить 1 зерно, на вторую – 2 зерна, на третью – 4 зерна и так далее до последней 64-й клетки, увеличивая каждый раз количество зерен в 2 раза. Однако вскоре выяснилось, что такого количества зерна нет на всей Земле. Выполнить такое желание нельзя. Но царю необходимо было «не потерять лицо». Как Вы думаете, что посоветовали царю мудрые советники?

2.14. В комнате имеются три лампочки, к которым присоединены три выключателя, расположенные в коридоре, при этом какой выключатель соответствует какой лампочке неизвестно. Разрешается, произведя какие-то манипуляции с выключателями, затем зайти в комнату. Можно ли после этого установить, какой выключатель соответствует какой лампочке?

2.15. Эту историю рассказывают про знаменитого философа Канта. Как-то вечером он обнаружил, что его настенные часы остановились. Чтобы узнать время, он отправился в гости к одному из своих друзей. Пробыв там некоторое время, он вернулся домой и поставил правильно стрелки часов. Как ему это удалось?

2.16. (Старинная задача) Некто, умирая, завещал: «Если у моей жены родится сын, то пусть ему будет дано имения, а жене – остальная часть. Если же родится дочь, то ей, а жене». Родилась двойня – сын и дочь. Как разделить наследство?

2.17. В заповедном и дремучем страшном Муромском лесу из-под земли бьют ключи – источники волшебной воды. Из первых девяти источников воду может взять каждый, но последний источник находится в пещере Кощея Бессмертного, и никто, кроме самого Кощея, не может набрать там воды. На вкус и цвет волшебная вода ничем не отличается от обыкновенной воды, но, если человек выпьет из волшебного источника, он умрет (волшебная вода смертельна даже для самого Кощея). Спасти может только одно: запить эту воду водой из волшебного источника, номер которого больше. Если же выпить воды из десятого источника, то уже ничего не поможет.

Иван-царевич вызвал Кощея на поединок. Условия простые: каждый приносит с собой кружку с водой и дает ее выпить противнику. Кощей согласился. Он рассуждал так: «Если я дам Ивану-царевичу воды из десятого источника, то он погибнет. Его яд я запью той же водой из десятого источника и спасусь». Помогите Иван победить в поединке.

2.18. В стране Анчурии, где правит президент Мирафлорес, приблизилось время президентских выборов. В стране 20 млн. избирателей, из которых только 1% (регулярная армия Анчурии) поддерживает Мирафлореса. В стране демократическая система голосования: избирателей разбивают на несколько равных групп, каждая затем опять разбивается на несколько равных групп и так далее. В самых мелких группах выбирают представителя группы – выборщика – для голосования в большей группе, затем выборщики выбирают выборщика для этой большей группы и так далее. Наконец выборщики из самых больших групп выбирают президента. Мирафлорес сам делит избирателей на группы. При равенстве голосов побеждает оппозиция. Как Мирафлоресу победить на выборах?

Занятие 3. Простые алгоритмы

3.1. (Задача Алкуина) Требуется перевезти через реку волка, козу и кочан капусты. На лодке, кроме перевозчика, может поместиться только один из трех. Как перевезти их, чтобы коза не съела капусту, а волк не съел козу?

3.2. (Задача Пуассона) Некто имеет 12 пинт вина и хочет подарить половину своему другу. Но у него нет сосуда в 6 пинт, а есть два сосуда в 8 пинт и 5 пинт. Каким образом он мог бы налить 6 пинт вина в сосуд емкостью 8 пинт?

3.3. На сковороде помещается два кусочка хлеба. На поджаривание одного кусочка с одной стороны требуется минута Можно ли поджарить три кусочка хлеба с обеих сторон быстрее, чем за 4 мин?

3.4. Как при помощи чашечных весов без гирь рассыпать 24 кг сахарного песка в мешки весом 9 кг и 15 кг?

3.5. В кабине лифта двадцатиэтажного дома есть две кнопки. При нажатии на одну из них лифт поднимается на 13 этажей, а при нажатии на другую – опускается на 8 этажей. Как попасть с 13-го этажа на 8-й?

3.6. Как с помощью двух песочных часов (на 7 мин и на 11 мин) отмерить промежуток времени в 15 мин?

3.7. С числом, записанным на доске, можно производить следующие операции: заменить его удвоенным, или стереть его последнюю цифру. Как с помощью нескольких операций получить из числа 458 число 14?

3.8. Как с помощью прямоугольной плитки размером 7 × 9 см начертить на листе бумаги отрезок в 1 см?

3.9. Три разбойника делят добычу. Каждый из них уверен, что он мог бы поделить добычу на две равные части, но второй ему не доверяет. Как разбойникам разделить добычу, чтобы оба остались довольны?

3.10. Имеется два шнура, которые могут гореть. Каждый из шнуров полностью сгорает за 1 час. Как с помощью этих шнуров отмерить 45 минут, если шнуры горят неравномерно?

3.11. С натуральным числом, записанным в десятичной системе, разрешается проделать операции: 1) приписать на конце цифру 4; 2) приписать на конце цифру 0; 3) разделить на 2 (если число четно). Можно ли из числа 4 получить 2 007?

3.12. У Змея Горыныча 2 000 голов. Сказочный богатырь одним ударом отрубает 1, 17, 21 или 33 головы, но при этом, соответственно, отрастают 10, 14, 0 или 48 голов. Если все головы отрублены, то новые не отрастают. Как богатырю победить Змея?

3.13. На пути к сокровищам Али-Баба должен открыть, еще один – электронный – замок. В настоящий момент на экране замка высвечены четыре числа 1, 2, 3, 4. Чтобы открыть замок, требуется получить на экране числа 2, 0, 0, 7. За один шаг можно а) умножить одно из чисел на 2; б) одновременно вычесть из каждого числа по 1. Сможет ли Али-Баба открыть замок? Ответ объясните.

3.14. В школьном кабинете химии имеются три банки с серной кислотой емкостью 1, 2 и 3 литра. Концентрация кислоты в этих банках неизвестна (скорее всего, она различна – но в точности этого никто не знает). Требуется перелить кислоту в три пустые банки такой же емкости, но так чтобы концентрация кислоты во всех банках была одинакова. Как это сделать?

3.15. На склад привезли 99 полных бочек серной кислоты неизвестной (возможно различной) концентрации. По условиям контракта необходимо, чтобы концентрация кислоты во всех бочках была одинакова. Как этого добиться, если в вашем распоряжении еще одна, пустая, бочка и прибор, позволяющий переливать любое количество жидкости из бочки в бочку?

3.16. У сейфа – 16 ручек, которые расположены в 4 ряда по 4 ручки в ряду. Каждая ручка может находиться в одном из двух положений: горизонтальном либо вертикальном. При повороте любой ручки поворачиваются все ручки в том ряду и в том столбце, где она находится. Сейф открывается, если все ручки находятся в горизонтальном положении. Верно ли, что при любом исходном положении ручек сейф можно открыть?

3.17. Али-Баба хочет попасть пещеру с сокровищами. Перед пещерой стоит бочка, в крышке которой имеется 4 отверстия, образующие квадрат. Под отверстиями находится по кувшину, в каждом из которых торчит селедка хвостом вверх или хвостом вниз.

Али-Баба может просунуть руки в любые два отверстия, определить положения селедок и повернуть одну или обе по своему усмотрению. Если хвосты селедок окажутся направленными в одну сторону, то дверь пещеры открывается.

После того как Али-Баба вынет руки из отверстий, бочка поворачивается, причем Али-Баба не может соотнести новое положение бочки по отношению к старому. Как Али-Бабе попасть в пещеру?

3.18. На столе лежат 17 монет. Некоторые лежат «орлом» вверх, некоторые – «орлом» вниз. За первый ход можно перевернуть шестнадцать монет, за второй – пятнадцать, за третий – четырнадцать, и так далее, за шестнадцатый – одну монету. Докажите, что можно действовать таким образом, что в конце все монеты будут лежать одинаковым образом («решкой» вверх или «орлом» вверх).

Занятие 4. Наглядная геометрия

4.1. Можно ли в тетрадном листе прорезать дыру такую, чтобы сквозь нее мог пролезть человек?

4.2. В Вашем распоряжении несколько кирпичей и линейка. Как измерить диагональ кирпича?

4.3. После 7 стирок длина, ширина и высота куска мыла уменьшилась вдвое. На сколько стирок хватит оставшегося куска мыла?

4.4. Из бумаги склеили куб. Его поверхность состоит из 6 одинаковых квадратов. Можно ли разрезать ее на 12 одинаковых квадратов?

4.5. Путешественник выходит из некоторой точки земного шара и идет 1 км на юг, 1 км на восток и 1 км на север. Мог ли он вернуться в ту же самую точку, откуда вышел? Если да, то сколько всего таких точек существует?

4.6. Известно, что больше половины поверхности Земли занимают моря. Докажите, что найдутся две диаметрально противоположные точки поверхности, занятые морями.

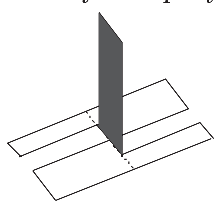
4.7. Вдоль экватора Земли протянули веревку, которую затем удлинили на 1 м, а образовавшийся зазор равномерно распределили по всей длине веревки. Сможет ли кошка пролезть в этот зазор?

4.8. На глобусе провели 17 параллелей и 24 меридиана. На сколько частей разделилась поверхность глобуса?

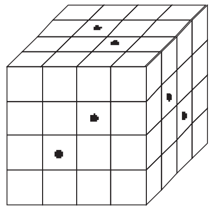
4.9. Из Москвы вылетел вертолет, который пролетел 300 км на юг, потом 300 км на запад, 300 км на север и 300 км на восток. Где он оказался: южнее Москвы, севернее Москвы или на той же широте? Восточнее Москвы, западнее Москвы или на той же долготе?

4.10. Можно ли разрезать арбуз на 4 куска так, чтобы после еды осталось 5 корок?

4.11. Можно ли из целого прямоугольного листа бумаги сделать фигуру, изображенную на рисунке?



4.12. Большой кубик склеен из маленьких деревянных кубиков. В нем просверлили 6 сквозных отверстий параллельных ребрам куба. Сколько маленьких кубиков осталось неповрежденными?



4.13. Можно ли так сцепить три веревочных кольца, чтобы при разрезании любого из них конструкция распадается?

4.14. Покрышка футбольного мяча состоит из пятиугольников и шестиугольников, причем в каждой вершине сходится по три ребра. Сколько пятиугольников?

4.15. В пространстве находится точечный источник света. Можно ли его закрыть четырьмя шарами?

4.16. Можно ли сложить квадратный лист бумаги так, чтобы затем одним взмахом ножниц разрезать его на четыре квадратика?

4.17. Можно ли расставить на столе четыре одинаковых стакана так, чтобы все попарные расстояния между донышками были равны? За расстояния между донышками приняты расстояния между их центрами.

4.18. Муравей забрался в банку из-под сахара, имеющую форму куба. Сможет ли он последовательно обойти все ребра куба, не проходя дважды по одному ребру?

Занятие 5. Четные и нечетные числа

5.1. Директор школы в своем отчете указал, что в школе 3 688 учащихся, причем мальчиков на 373 человека больше, чем девочек. Докажите, что в отчете допущена ошибка.

5.2. Можно ли стенку размером 2 007 × 2 007 покрыть плитками размером 1 × 2?

5.3. Можно ли в таблицу 2 011 × 2 011 расставить числа так, чтобы в каждой строке сумма чисел была четной, а в каждом столбце нечетной?

5.4. В наборе 23 гири: 1 кг, 2 кг, 3 кг, .., 23 кг. Можно ли гири разложить на две равные по весу кучки, если гиря в 21 кг потеряна?

5.5. Можно ли разменять 25 руб. десятью купюрами достоинством 1 руб., 3 руб. и 5 руб.?

5.6. Можно ли числа 1, 2, .., 21 разбить на группы так, чтобы в каждой из групп наибольшее число равнялось сумме всех остальных?

5.7. Федя утверждает, что придумал пример на деление с остатком так, чтобы делимое, делитель, неполное частное и остаток оканчивались на 9, 7, 3 и 1 (в некотором порядке), а Маша говорит, что так быть не может. Кто же из них прав?

5.8. Федя написал на доске равенство:

$$1*2*3*4*5*6*7*8*9=20$$

(вместо знака «*» в неизвестном порядке написаны знаки «+» и «–»). Докажите, что в равенстве допущена ошибка.

5.9. Можно ли соединить 113 городов дорогами так, чтобы из каждого города выходило ровно 5 дорог?

5.10. Вася сказал, что умеет решать уравнение $19x^2 + 97x = 1\,997$ в натуральных числах. Докажите, что Вася ошибся.

5.11. Числа a и b – целые. Известно, что $a + b = 2\,012$. Может ли сумма $7a + 7b$ равняться 6 799?

5.12. Четно или нечетно число S, если

$$S = 1 + 2 + ... + 2007?$$

5.13. Кузнечик прыгает по координатной прямой: длина первого прыжка – 1, длина второго 2 и так далее. Сможет ли он вернуться на прежнее место, сделав ровно 2 007 прыжков?

5.14. Сумму двух натуральных чисел умножили на произведение. Могло ли в результате получиться число 2 013?

5.15. Вася утверждает, что придумал три натуральных числа, попарные суммы которых равны 2 010, 2 011 и 2 012. Возможно ли такое?

5.16. В вершинах равностороннего треугольника написаны числа 1, 2, 3. Можно ли сложить несколько таких треугольников в стопку так, чтобы сумма чисел в каждой вершине равнялась 2 011?

5.17. Федя купил тетрадь из 96 листов и пронумеровал страницы по порядку от 1 до 192. Хулиган Вася вырвал из тетради 25 листов и сложил 50 написанных на них чисел. Могло ли у него в сумме получиться 2 012?

5.18. На доске записаны 2 007 чисел, каждое из которых равно либо 1, либо –1. Можно ли их разбить на две группы так, чтобы суммы чисел в группах были равны?

Занятие 6. Делители и кратные

6.1. Барон Мюнхгаузен утверждал, что ему удалось найти такое натуральное число, произведение цифр которого равно 6 552. Подумайте, может ли это быть правдой?

6.2. Проверьте, утверждения:

а) $10^n + 2$ кратно 3; б) $10^n + 8$ кратно 9;

в) 44 ... 44 кратно 8; г) 11 ... 11 кратно 37.

6.3. Ковбой Джо зашел в бар. Он купил бутылку виски за 3 доллара, трубку за 6 долларов, три пачки табака и девять коробок непромокаемых спичек. Бармен сказал: «С вас 11 долларов 80 центов за все». Вместо ответа Джо выхватил револьвер. Почему он решил, что его пытаются надуть?

6.4. Верно ли, что сумма 1 + 2 + ... +1993 кратна 1 993?

6.5. Можно ли натуральные числа от 1 до 12 расставить в таблицу из 3 строк и 4 столбцов так, чтобы сумма чисел в каждом из четырех столбцов была одна и та же?

6.6. Можно ли натуральные числа от 1 до 12 расставить в таблицу из 3 строк и 4 столбцов так, чтобы сумма чисел в каждой из трех строк была одна и та же?

6.7. В двух шкатулках лежит 70 монет. Известно, что в первой шкатулке 5/9 от числа всех монет – золотые, а остальные серебряные, во второй 7/17 от числа монет – серебряные, а остальные золотые. Сколько монет лежит в каждой шкатулке?

6.8. Про трехзначное число известно, что если от него отнять 7, то результат разделится на 7, если от него отнять 8, то результат разделится на 8, а если отнять 9, то результат разделится на 9. Что это за число?

6.9. Найдите число кратное 50 и имеющее ровно 10 натуральных делителей. Сколько таких чисел существует?

6.10. Найдите наименьшее составное число, которое не делится ни на одно из натуральных чисел от 1 до 10.

6.11. Сколькими нулями оканчивается произведение натуральных чисел от 1 до 100?

6.12. Шестизначное число делится на 7. Его первую цифру стерли, а затем написали ее в конце числа. Верно ли, что получившееся шестизначное число делится на 7?

6.13. Известно, что если сумма цифр числа кратна 3 или 9, то само число кратно 3 или 9. Верно ли, что если сумма цифр числа кратно 27, то число кратно 27?

6.14. Докажите, что число, в десятичной записи которого участвуют три единицы и несколько нулей, не может быть квадратом.

6.15. Докажите, что существует 2 012 идущих подряд составных чисел.

6.16. Автобусные билеты имеют номера от 000001 до 999999. Билет называется счастливым, если у него сумма первых трех цифр равна сумме трех последних. Докажите, что сумма всех счастливых билетов кратна 9, 13, 37 и 1 001.

6.17. Существует ли число, которое при зачеркивании первой цифры уменьшается в 58 раз? 57 раз?

6.18. В равенстве 109^{10} = 23673**67459211723401 заменить звездочки цифрами так, чтобы получилось верное равенство.

6.19. Верна ли теорема: «Число $n^2 + n + 41$ – простое при любом натуральном n»?

6.20. В школе 25 первоклассников. У каждого из них есть три воздушных шарика: красный, синий и желтый. Смогут ли они так поменяться шариками, чтобы у каждого все три шарика оказались одноцветными?

6.21. Докажите, что число 11 ... 11 (состоящее из 243 единиц) кратно 243.

6.22. Коля написал на доске пример на умножение двузначных чисел. Затем он стер цифры и заменил их буквами (одинаковые цифры – одинаковыми, а разные – разными). Получилось равенство: $\overline{ДО} \times \overline{МИ} = \overline{АББА}$. Докажите, что он ошибся.

Занятие 7. Делимость и остатки

7.1. Как может измениться частное и остаток, если делимое и делитель увеличить в 3 раза?

7.2. Вася разделил некоторое нечетное число на 2 007 и в остатке получил 99. Какой остаток получится, если разделить Васино число на 18?

7.3. Существует ли такое натуральное число, которое при делении на 9 дает остаток 2, а при делении на 6 остаток 1?

7.4. Известно, что число а при делении на 5 дает остаток 2, а при делении на 3 – остаток 1. Найдите остаток от деления числа a на 15.

7.5. Найдите число, которое при делении на 2 дает в остатке 1, при делении на 3 дает в остатке 2, при делении на 4 дает в остатке 3, а при делении на 5 дает в остатке 4.

7.6. Найдите все числа, при делении которых на 7 в частном получится то же число, что и в остатке.

7.7. Проверьте, может ли сумма 12 последовательных натуральных чисел быть кратна 4.

7.8. Найдите наименьшее число, которое при делении на 2 дает остаток 1, при делении на 3 – остаток 2, при делении на 4 – остаток 3, при делении на 5 – остаток 4, при делении на 6 – остаток 5, при делении на 7 – остаток 6, при делении на 8 – остаток 7, при делении на 9 – остаток 8, при делении на 10 – остаток 9.

7.9. У числа 2^{100} определите

а) последнюю цифру; б) предпоследнюю цифру; в) третью цифру с конца.

7.10. Проверьте равенство $3^{100} + 7^{100} = 8^{100}$.

7.11. Докажите, что число кратно 9 $\underbrace{11\ldots11}_{\text{n цифр}} - n$.

7.12. Сумму цифр числа N обозначим $S(N)$. Известно, что $S(N) = S(2N)$. Докажите, что N кратно 9.

7.13. Для каких простых чисел p числа $2p + 1$ и $4p + 1$ тоже простые?

7.14. Какой остаток дает число 2^{99} при делении на 7?

7.15. У каждого из чисел от 1 до 19992000 2001 вычислили сумму цифр. У получившихся чисел снова вычислили сумму цифр. И так далее, до тех пор, пока не получились однозначные числа. Каких чисел в итоге получилось больше: 1 или 9?

7.16. Существует ли натуральное число, сумма цифр квадрата которого равна 1 994?

7.17. Докажите, что числа вида $4k + 3$ нельзя представить в виде суммы двух квадратов.

7.18. Выпишем несколько первых степеней тройки. Получаются числа, у которых в разряде десятков – четная цифра. Верно ли, что так будет всегда?

Занятие 8. Логические задачи

8.1. На крыльце дома сидят рядом мальчик и девочка. Саша говорит: «Я мальчик». Женя говорит: «Я девочка». Если, по крайней мере, один из детей врет, то кто из них мальчик, а кто девочка?

8.2. Один из четырех мальчиков разбил стекло. Андрей утверждает, что стекло разбил Боря, Боря говорит, что это сделал Гена, Вася берет вину на себя, а Гена говорит, что Боря врет. Правду сказал только один. Кто?

8.3. Один из четырех гангстеров украл чемодан с деньгами. На допросе Алекс сказал, что чемодан украл Луи, Луи утверждал, что виновник Том, Том заверял следователя, что Луи лжет. Жорж настаивал только на том, что он не виноват. В ходе следствия выяснилось, что только один из гангстеров сказал правду. Кто?

8.4. Показания трех подозреваемых по делу противоречат друг другу, причем Смит обвиняет во лжи Брауна, Браун – Джонса, а Джонс говорит, что не следует верить ни Брауну, ни Смиту. Кого бы Вы, будучи следователем, допросили первым?

8.5. Известно, что из шести гангстеров ровно двое участвовали в ограблении. На вопрос, кто участвовал в ограблении, они дали следующие ответы:

1) Гарри: Чарли и Джордж; 2) Джеймс: Дональд и Том; 3) Дональд: Том и Чарли; 4) Джордж: Гарри и Чарли; 5) Чарли: Дональд и Джеймс. Поймать Тома не удалось. Кто участвовал в ограблении, если известно, что четверо верно назвали одного из участников ограбления, а один назвал неверно оба имени?

8.6. Рассматривается дело Брауна, Джонса и Смита. Один из них совершил преступление. В процессе расследования каждый из них сделал по два заявления.

Браун: 1) Я не преступник; 2) Джонс – тоже.

Джонс: 1) Браун не преступник; 2) Преступник – Смит.

Смит: 1) Преступник – Браун; 2) Я не преступник.

В процессе следствия было установлено, что один из них дважды солгал, другой дважды сказал правду, а третий – один раз солгал и один раз – сказал правду. Кто совершил преступление?

8.7. Из протокола допроса трех известных гангстеров *A, B* и *C* (фамилии гангстеров скрыты в интересах следствия).

A: 1) Это не я; 2) В этот день меня не было в городе; 3) Преступник – *C*.

B: 1) Преступник – ; 2) Если бы я совершил преступление, я бы не сознался; 3) У меня и так много денег.

C: 1) Я не совершал преступления; 2) Я давно ищу хороший портфель; 3) *A* не было в городе в день преступления.

Известно, что преступление мог совершить только один из них. В ходе следствия выяснилось, что из трех заявлений каждого гангстера два верных, а одно неверное. Кто совершил преступление?

8.8. На складе совершено хищение. Следствием установлено: 1) Преступники вывезли награбленное на автомашине; 2) Преступление совершил кто-то из троих: Алекс, Виктор или Серж (может быть и все трое); 3) Серж никогда не ходит на дело без Алекса; 4) Виктор не умеет водить машину. Виновен ли Алекс?

8.9. Браун, Джонс и Смит – свидетели ограбления банка. Браун показал, что преступники скрылись на синем «Бьюике», Джонс, что это был черный «Крайслер, а Джонс, что это был «Форд», но не синий. По рассеянности, каждый из них указал правильно либо только марку, либо только цвет машины. На какой машине уехали преступники?

8.10. До царя дошла весть, что кто-то из трех богатырей убил Змея Горыныча. Приказал царь им явиться ко двору. Молвили богатыри:

– Змея убил Добрыня Никитич, – сказал Илья Муромец.

– Змея убил Алеша Попович, – молвили Добрыня Никитич.

– Я убил змея, – признался Алеша Попович. Известно, что только один богатырь сказал правду, а двое слукавили. Кто убил змея?

8.11. Математик пошел к приятелю в гости, но пока шел, забыл номер его квартиры. Расспрашивая соседей, он выяснил:

1) если верно, что номер квартиры кратен 2, то он больше 50, но меньше, чем 59;

2) если верно, что этот номер не кратен 3, то он больше 60, но меньше, чем 69;

3) если верно, что этот номер не кратен 4, то он больше 70, но меньше, чем 79.

Известно, что Математик сумел определить номер квартиры по этим данным. Попробуйте и Вы.

8.12. Среди четырех утверждений: 1) «число а делится на 2»; 2) «число а делится на 4»; 3) «число а делится на 12», 4) «число а делится на 24» три верных, а одно неверное. Какое?

8.13. Николай сказал: «Я поймал рыб столько же, сколько мой сын». Петр сказал: «Я поймал рыб втрое больше, чем мой сын». Известно, что никого, кроме упомянутых лиц, на рыбалке не было, а всего поймано 49 рыб. Могли ли оба высказывания быть правдивыми? Ответ объясните.

8.14. Вася сказал: «Если от двузначного номера моей квартиры отнять число, образующееся после перестановки его цифр, то получится номер дома, в котором я живу». Известно, что Лена, зная номер Васиного дома, сумела по этим данным определить номер Васиной квартиры. Определите его и Вы.

8.15. Встретились два математика. Вот их диалог: – У тебя два сына? – Да, маленькие, в школу не ходят. Кстати, произведение их лет равно числу голубей возле нас. – Этих данных недостаточно. – А старшего сына я назвал твоим именем. – Теперь я знаю, сколько им лет. Сколько лет сыновьям?

8.16. Задумано трехзначное число, у которого с любым из чисел 543, 142 и 562 совпадает один из разрядов, а два других не совпадают. Какое число задумано?

8.17. Найдите четырехзначное число, все цифры которого различны, если известно, что числа 5 860, 1 674, 9 432, 3 017 содержат по две цифры, принадлежащие искомому числу, однако ни одна из них не стоит в них на том же месте, что и в искомом числе.

8.18. В коробке лежат карточки на противоположных сторонах которых написаны соседние натуральные числа: на первой – 1 и 2, на второй – 2 и 3 и так далее. Два математика Андрей и Василий, сидящие друг напротив друга, показывают одну из карточек (каждый видит свою сторону). Происходит следующий разговор.

Андрей: Я не знаю, что на Вашей стороне.

Василий: Я тоже не знаю, что на Вашей стороне.

Андрей: Тогда Я знаю, что на Вашей стороне.

Василий: Тогда Я тоже знаю, что на Вашей стороне.

Что было написано на карточке?

8.19. Некий владыка, желая испытать трех своих мудрецов, сказал им: «Перед Вами пять колпаков: три черных и два белых. Вам наденут по колпаку. Тот из вас, кто первым догадается какого цвета на нем колпак, тот получит награду». Затем мудрецам завязали глаза, и надели им на голову по колпаку. После того как с них сняли повязки, мудрецы долго молчали. Наконец, один из них сказал: «На мне черный колпак!» Как рассуждал этот мудрец?

8.20. Три дамы Анна, Вера и Света сидят в купе железнодорожного вагона с испачканными в саже лицами и смеются. Вдруг одна из них перестает смеяться. Почему?

Занятие 9. В стране рыцарей и лжецов

9.1. Однажды, прогуливаясь по стране рыцарей и лжецов, я встретил человека, который сказал про себя: «Я – лжец». Кем мог быть человек, которого я встретил?

9.2. Перед нами два жителя страны рыцарей и лжецов. Андре говорит: «Я – лжец, а Виктор – не лжец». Кто из них рыцарь, и кто – лжец?

9.3. За круглым столом собралось 100 человек – каждый из них либо рыцарь, либо лжец. Рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут. Все кроме одного сказали: «99 из нас – лжецы». Сколько лжецов могло собраться за столом?

9.4. Перед нами три жителя страны рыцарей и лжецов. Андре говорит: «Мы все лжецы». Виктор говорит: «Ровно один из нас лжец». Кто Серж – рыцарь или лжец? Можно ли определить, кто Виктор?

9.5. На острове рыцарей и лжецов было совершено преступление. К суду были привлечены три жителя страны. На вопрос судьи Андре ответил неразборчиво. Когда судья переспросил двух оставшихся, то Виктор сказал, что Андре утверждает, что он рыцарь, а Серж сказал, что Андре назвал себя лжецом. Кем являются Виктор и Серж?

9.6. Однажды между четырьмя жителями страны рыцарей и лжецов произошел интересный разговор.

Андре сказал: «По крайней мере, один из нас – лжец».

Виктор сказал: «По крайней мере, двое из нас – лжецы».

Серж сказал: «По крайней мере, трое из нас – лжецы».

Джон сказал: «Среди нас нет лжецов».

Но среди них все же были лжецы. Кто?

9.7. В страну рыцарей и лжецов приехал турист. Первый островитянин, которого он встретил, утверждал, что является рыцарем. Турист обрадовался, и нанял его себе в проводники. Через некоторое время они встретили еще одного местного жителя. Турист отправил проводника спросить у него рыцарь он или лжец. Проводник вернулся и ответил, что абориген утверждает, что он рыцарь. Кем был проводник, рыцарем или лжецом?

9.8. В стране живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Путник встретил троих островитян и спросил каждого: «Сколько рыцарей среди твоих спутников?». Первый ответил: «Ни одного». Второй сказал: «Один». Что сказал третий?

9.9. На заседании Парламента страны рыцарей и лжецов, часть из присутствующих отстаивала точку зрения, что число и лжецов, и рыцарей среди депутатов Госдумы нечетно. Остальные, в свою очередь, доказывали, что это число четно. Председательствующий, подводя итоги обсуждения, заметил, что всего депутатов 213 человек. Кто он, рыцарь или лжец?

9.10. За круглым столом сидят восемь человек, каждый из которых либо рыцарь, либо лжец. На вопрос, кто их соседи, каждый из них ответил: «Мои соседи – лжец и рыцарь царь». Сколько среди них было лжецов? Как изменился бы ответ, если бы за столом сидело девять человек?

9.11. В правительстве страны рыцарей и лжецов 12 министров. Некоторые из них лжецы, а остальные рыцари.

Однажды, на заседании правительства были высказаны следующие мнения: первый из министров сказал: «Здесь нет ни одного рыцаря», второй: «Здесь не более одного рыцаря», третий: «Здесь не более двух рыцарей» и так далее до двенадцатого, который сказал: «Здесь не более одиннадцати рыцарей». Сколько лжецов входят в правительство?

9.12. За круглым столом сидят 38 попугаев и Мартышка. Известно, что каждый из них либо рыцарь, либо лжец. Мартышка обошла всех попугаев (по часовой стрелке) задала каждому попугаю один и тот же вопрос: «Кем является ваш сосед справа – рыцарем или лжецом?» Первые два попугая (справа от Мартышки) ответили: «Мой сосед справа – лжец». Следующие два: «Мой сосед справа – рыцарь», следующие два: «Мой сосед справа – лжец» и так далее. По окончании опроса Мартышка сказала: «Среди нас не менее 9 рыцарей». Сколько рыцарей было на самом деле?

9.13. В комнате собрались лжецы, которые всегда лгут, и рыцари, которые всегда говорят правду. Из комнаты послышались голоса. Первый голос: 1) нас в комнате не более трех человек; 2) все мы лжецы; Второй голос: 1) нас в комнате не более четырех человек; 2) не все мы лжецы. Третий голос: 1) нас в комнате пятеро; 2) трое из нас лжецы. Кого в комнате больше: рыцарей или лжецов?

9.14. На острове рыцарей и лжецов принят закон: рыцари разрешили лгать, но только в день своего рождения. В остальные дни они обязаны говорить правду. Пьер и Джон – рыцари. На вопрос: «Когда Ваш день рождения?», заданный 23 января, Пьер ответил: «Он был вчера», а Джон: «Он будет завтра». На следующий день (24 января), на тот же вопрос, каждый из них ответил то же самое. Определите, если возможно, дату рождения каждого из них.

9.15. По подозрению в совершении преступления задержаны 5 человек: некоторые из них рыцари (всегда говорят правду), а остальные – лжецы (всегда лгут). Допрашивали их по одному. Два первых подозреваемых утверждали одно и то же: «Среди остальных задержанных не менее половины – лжецы». Показания еще двух тоже совпали: «Среди остальных задержанных не менее половины – рыцари». Один из задержанных от показаний отказался. Выясните, если возможно: а) сколько среди задержанных рыцарей? б) кто отказался от показаний – рыцарь или лжец?

9.16. В парламенте страны рыцарей и лжецов представлены три политические партии. Правые: «Любители правды», левые: «Объединенные лжецы» и центристы – партия «И те, и эти». Каждому депутату парламента (а их 100 человек) задали по три вопроса: 1) Являетесь ли Вы членом партии «Любители правды»? 2) Являетесь ли Вы членом партии «Объединенные лжецы»? 3) Являетесь ли Вы членом партии «И те, и эти»? В результате оказалось, что на первый вопрос положительно ответили 72 человека, на второй – 47 человек, а на третий – 31 человек. Сколько лжецов в парламенте страны?

9.17. На поляне расположились пятеро жителей острова рыцарей и лжецов (рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут) и заезжий путешественник (не рыцарь и не лжец). Между жителями острова завязался разговор:

– Ровно половина присутствующих – лжецы, – сказал первый житель острова.

– Более четверти из присутствующих – рыцари – заметил второй.

– Более трети из присутствующих – лжецы – сказал третий.

– Рыцарей и лжецов среди присутствующих поровну – сказал четвертый.

– Вы все лжете! – сказал пятый. Сколько из них лжецов?

9.18. В сенате страны рыцарей и лжецов – 100 сенаторов. Каждый из них либо рыцарь, либо лжец. Известно, что:

1. По крайней мере, один из сенаторов – рыцарь.

2. Из двух произвольно выбранных сенаторов, по крайней мере, один – лжец. Определите, сколько в сенате рыцарей и сколько лжецов?

Занятие 10. Сюжетные задачи

10.1. Некий человек нанял работника на год, обещал ему дать 12 рублей и кафтан. Но тот, отработав 7 месяцев, захотел уйти и просил достойной платы с кафтаном. Хозяин дал ему по достоинству расчет 5 рублей и кафтан. Спрашивается, а какой цены тот кафтан был?

10.2. В комнате стоят табуретки и стулья. У каждой табуретки 3 ноги, у каждого стула 4 ноги. Когда на всех табуретках и стульях сидят люди, в комнате всего 39 ног. Сколько стульев и сколько табуреток в комнате?

10.3. Можно ли разлить 50 литров бензина по трем бакам так, чтобы в первом баке было на 10 литров больше, чем во втором, а после переливания 26 литров из первого бака в третий, в третьем баке стало столько же, сколько и во втором?

10.4. Для покупки альбома Маше не хватило 2 копейки, Коле – 34 копейки, а Васе – 35 копеек. Тогда они сложили свои деньги, но их все равно не хватило на покупку одного альбома. Сколько стоит альбом?

10.5. Хозяйка купила на рынке курицу. Курица снесла 2 яйца, после чего попала на обеденный стол. Далее каждый петух сразу попадал на обеденный стол, а каждая курица съедалась после того, как успевала снести два яйца. Через некоторое время этот процесс оборвался. Петухов было съедено 17 штук. Сколько было съедено кур?

10.6. Петя написал на доске пример на умножение двузначных чисел. Затем он стер все цифры и заменил их буквами. Получилось равенство: $\overline{СТ} \cdot \overline{ОЛ} = \overline{ДИВАН}$. Докажите, что он ошибся.

10.7. В стаде, состоящем из лошадей, двугорбых и одногорбых верблюдов, в общей сложности 200 горбов. Сколько животных в стаде, если количество лошадей равно количеству двугорбых верблюдов?

10.8. Учитель задал на уроке сложную задачу. В результате количество мальчиков, решивших эту задачу, оказалось равно количеству девочек, ее не решивших. Кого в классе больше: решивших задачу или девочек?

10.9. Среди музыкантов каждый седьмой – шахматист, а среди шахматистов каждый девятый музыкант. Кого больше: музыкантов или шахматистов? Почему?

10.10. Задание на олимпиаде состояло из 5 задач. Известно, что 12 участников решили 49 задач, причем Андрей и Юля решили по 4 задачи, остальные – не менее одной. Оцените число школьников, решивших все задачи.

10.11. На конференцию собрались 100 математиков. Среди них 85 человек знают английский язык, 80 – знают испанский, 75 – немецкий. Сколько участников конференции заведомо знают все три языка?

10.12. В отчете об изучении иностранных языков студентами полицейской академии говорилось, что из 100 человек 5 изучают английский, немецкий и французский языки, 10 – английский и немецкий, 8 – французский и английский, 20 – немецкий и французский, 30 – английский, 23 – немецкий, 50 – французский. Составителям отчета, было указано на ошибки. Почему?

10.13. В одном стакане вино, в другом вода. Немного вина перелили из первого стакана во второй, затем тщательно перемешали и затем столько же перелили обратно. Чего оказалось больше: вина в стакане с водой или воды в стакане с вином?

10.14. Маша выпила шестую часть чашки черного кофе и долила его молоком. Потом она выпила треть часть чашки и снова долила молоком. Потом она выпила половину чашки и снова долила молоком. Потом она выпила всю чашку. Чего больше выпила Маша, кофе или молока?

10.15. Биологи открыли удивительную разновидность амеб. Каждая из них ровно через минуту делится на две. Биолог кладет амебу в пробирку, и ровно через час пробирка оказывается полностью заполненной амебами. Сколько времени потребуется, чтобы вся пробирка заполнилась амебами, если в нее положить не одну, а две амебы?

10.16. Трое грелись у костра. Первый положил в костер три бревна, второй положил в него пять бревен, а третий заплатил им за это 8 руб. Как они должны были разделить между собой эти деньги? Придумайте аналогичную задачу с другими числами.

10.17. Сколько в книге страниц, если для их нумерации потребовалось 15 321 цифра?

10.18. Высота столба 20 м. Гусеница ползет по нему, при этом за день она поднимается на 5 метров, а за ночь опускается на 4 м. За какое время она доползет до вершины столба?

Занятие 11. Сюжетные задачи на движение

11.1. Расстояние между Атосом и Арамисом, едущими верхом по дороге, равно 20 лье. За один час Атос проезжает 4 лье, а Арамис – 5 лье. Какое расстояние будет между ними через час?

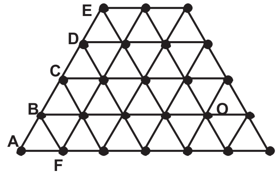
11.2. Волк, Медведь, Заяц и Лиса соревновались в беге по кольцевой трассе. Они стартовали одновременно, бежали с постоянными скоростями и через некоторое время вновь поравнялись друг с другом. Известно, что до этого момента Заяц обогнал Лису один раз, Лиса обогнала Волка три раза, Волк обогнал Медведя два раза. Сколько раз до этого момента Заяц обогнал Медведя?

11.3. Два пешехода движутся по прямой дороге навстречу друг другу со скоростью 5 км/ч. Первоначальное расстояние между ними – 10 км. Муха, которая летает со скоростью 14 км/ч, взлетает с первого пешехода, летит вдоль дороги ко второму, садится на него и, не теряя ни секунды, летит обратно к первому пешеходу, потом снова ко второму и так далее. Какое расстояние пролетит муха к тому моменту, когда пешеходы встретятся?

11.4. Львенок решил покататься на Большой Черепахе, но сначала ему нужно ее догнать. Какое расстояние придется пробежать Львенку прежде, чем он сможет покататься, если его скорость в 10 раз больше скорости Черепахи, а Черепаха находится в 180 м от Львенка?

11.5. Гребец, проплывая под мостом, потерял шляпу. Через 15 мин он заметил пропажу и поймал шляпу в километре от моста. Какова скорость течения реки?

11.6. «Треугольная» сетка сделана из шнура, который может гореть. Огонь распространяется по шнуру с одной и той же скоростью по всем направлениям, и звено сгорает ровно за 1 мин. Какие из отмеченных звеньев сетки (AB, BC, CD, DE или AF) сгорят последними, если поджечь сетку в точке O? Через какое время это произойдет?



11.7. Петя ехал по эскалатору. Когда он находился на середине эскалатора, мимо него пробежал хулиган, сорвал с него шапку и бросил ее на встречный эскалатор. Петя хочет как можно быстрее получить свою шапку обратно. Куда ему бежать: вниз по эскалатору или вверх?

11.8. Вагон длиною 18 м проезжает мимо столба за 9 сек. Сколько времени ему понадобится, чтобы проехать мост длиной 360 м?

11.9. Пароход плывет из одного города в другой и обратно. Одинаковое ли время затратит пароход, если в одном случае города находятся на берегу реки, а в другом – на таком же расстоянии на берегу озера? Скорость парохода относительно воды постоянна.

11.10. Пешеход, велосипедист и мотоциклист движутся в одну сторону с постоянными скоростями. В тот момент, когда пешеход и велосипедист находились в одной точке, мотоциклист был в 6 км позади них. В тот момент, когда мотоциклист догнал велосипедиста, пешеход отставал от них на 3 км. На сколько километров велосипедист обгонял пешехода в тот момент, когда пешехода догнал мотоциклист?

11.11. Два парома отходят одновременно и пересекают ее перпендикулярно берегам. Скорости у паромов постоянны. Первый раз паромы встречаются друг с другом на расстоянии 720 м от ближайшего берега. Достигнув берегов, они сразу отправляются обратно. На обратном пути они встречаются в 400 м от другого берега. Какова ширина реки?

11.12. Если велосипедист будет ехать со скоростью 10 км/ч, то он опоздает на 1 час. Если же он будет ехать со скоростью 15 км/ч, то он приедет на 1 час раньше. С какой скоростью он должен ехать, чтобы приехать вовремя?

11.13. Автобус проехал весь путь с постоянной скоростью, сделав одну остановку. Интересно, что до остановки автобус проехал столько километров, сколько мин ему оставалось ехать после нее, а после остановки автобус проехал столько километров, сколько мин ехал до нее. Найдите скорость автобуса.

11.14. Из города в одном направлении выехало три автомобиля: второй – через 10 мин после первого, третий – через 20 мин после второго. Через 30 мин после своего выезда третий автомобиль догнал второй, а еще через 10 мин он догнал первый автомобиль. Через какое время после своего выезда из города второй автомобиль догнал первый?

11.15. Два велосипедиста Андрей и Виктор движутся по двум прямым пересекающимся дорогам с равными постоянными скоростями. Оказалось, что как в 17:00, так и в 18:00 Виктор находился в два раза дальше от перекрестка, чем Андрей. В какое время Андрей мог проехать перекресток?

11.16. (Задача Льюиса Кэрролла). Курьеры из мест A и B двигаются каждый равномерно, но с разными скоростями, друг другу навстречу. После встречи, для прибытия к месту назначения, одному нужно было еще 16, другому – еще 9 часов. Сколько времени требуется тому и другому для прохождения всего пути от A до B?

11.17. От Нижнего Новгорода до Астрахани пароход идет 5 суток, а обратно – 7 суток. Сколько времени будут плыть плоты от Нижнего Новгорода до Астрахани?

11.18. Человек в первый день шел со скоростью 3 км/час, а во второй – со скоростью 6 км/час, в результате чего весь путь он прошел со средней скоростью 5 км/час. Когда он прошел большее расстояние – в первый день или во второй?

11.19. По шоссе едет колонна машин, растянувшаяся на 1 км, со скоростью 60 км/час. Проезжая мимо поста ДПС, каждая машина сбавляет скорость до 40 км/час. Какой станет длина колонны, когда все машины проедут мимо поста ДПС?

11.20. Человек, идущий по шоссе, заметил, что через каждые 15 мин его обгонял автобус, а через каждые 10 мин он встречал автобус. Считая, что автобусы с равными интервалами идут в обоих направлениях, найдите интервал времени, с которым пройдут в одну сторону два автобуса мимо неподвижного человека.

11.21. Два автомобиля, двигаясь по кольцевой дороге в одном направлении, оказываются рядом через каждый час. При движении с теми же скоростями в противоположных направлениях автомобили встречаются каждые полчаса. За какое время проедет всю кольцевую трассу каждый автомобиль?

11.22. Два лыжника шли по лыжне с постоянной скоростью 6 км/ч на расстоянии 200 м друг от друга. Затем они последовательно преодолели подъем (скорость 4 км/ч), пологий спуск (скорость 7 км/ч), затем лыжня «пропала» (их скорость упала до 3 км/ч). Каким стало расстояние между ними в этот момент?

11.23. Автомобиль едет со скоростью 60 км/час. Как он должен увеличить скорость, чтобы проезжать километр пути на полмины быстрее?

11.24. Человек приехал на станцию на час раньше обычного и не стал ждать посланную за ним машину, а пошел ей навстречу, встретил, сел и приехал на 20 мин раньше обычного. Сколько мин он шел пешком?

Занятие 12. Сюжетные задачи на проценты

12.1. Первое слагаемое увеличили на 1%, второе – на 4%. Могла ли сумма в результате увеличиться на 3%?

12.2. Что больше: 2% от 45 или 45% от 2?

12.3. В каком случае вкладчик получит больше денег: если банк начисляет доход в 12% раз в год или, если банк начисляет 1% раз каждый месяц?

12.4. Известно, что 2% положительного числа A больше, чем 3% положительного числа B. Верно ли, что 5% от числа A больше, чем 7% от числа B?

12.5. Цены снижены на 20%. На сколько больше товаров можно теперь купить на те же деньги?

12.6. За два года завод снизил объем выпускаемой продукции на 51%, при этом каждый год он снижался на одно и то же число процентов. На сколько?

12.7. После каждой стирки объем куска мыла уменьшается на 20%. После скольких стирок он уменьшится не меньше, чем вдвое?

12.8. После каждой стирки объем куска мыла уменьшается на 20%. После скольких стирок он уменьшится не меньше, чем вдвое?

12.9. Вчера число учеников, присутствующих в классе, было в восемь раз больше числа отсутствующих. Сегодня не пришли еще два ученика, и оказалось, что отсутствуют 20% от числа учеников, присутствующих в классе. Сколько всего учеников в классе?

12.10. У Феди в дневнике на 10% больше двоек, чем у Лизы. Федя исправил 10% своих двоек, а Лиза – 1% своих. У кого из них осталось больше неисправленных двоек?

12.11. В выборах поселкового совета участвовали 900 жителей села. За кандидата одного из кандидатов проголосовали 15% женщин и 20% мужчин, всего 159 человек. Сколько женщин и сколько мужчин участвовало в голосовании?

12.12. В некотором царстве, в некотором государстве в результате роста ВВП доход населения увеличился в среднем на 10%, причем у одной трети населения он увеличился на 20%. Как изменился доход остального населения?

12.13. Влажность свежих грибов – 99%, а сушеных – 98%. Как изменилась масса грибов после подсушивания?

12.14. По прогнозу «специалистов», цены на квартиры в Москве через год упадут: в рублях на 20%, в евро на 40%. А в Сочи цены в рублях упадут на 10%. На сколько упадут цены в Сочи в евро, если прогноз сбудется?

12.15. В семье 4 человека. Если Маше удвоят стипендию, то общий доход семьи возрастет на 5%, если вместо этого маме удвоят зарплату – то на 15%, если же зарплату удвоят папе – то на 25%. Как возрастет доход всей семьи, если дедушке удвоят пенсию?

12.16. В школе все учащиеся сидят за партами по двое, причем у 60% мальчиков сосед по парте – мальчик, а у 20% девочек сосед по парте – девочка. Какую часть учащихся этой школы составляют девочки?

12.17. Известно, что среди математиков – 10% философов, а среди философов – 1% математиков. Кого больше философов или математиков и на сколько процентов?

12.18. Морская вода содержит 5% соли. Сколько килограммов пресной воды надо добавить к 40 кг морской воды, чтобы содержание соли составляло 2%?

12.19. На туристском слете собрались все участники двух туристических походов (некоторые были в двух походах, некоторые только в одном). В первом походе было 60% мужчин, во втором – 75%. Докажите, что на встречу пришло мужчин не меньше, чем женщин.

12.20. Известно, что 85% студентов знают английский язык, а 75% – испанский. Какая часть делегатов знает оба языка?

12.21. В отаре 45% баранов, причем их вес составляет 55% веса всей отары. Известно, что вес овцы 81 кг. Сколько весит баран?

12.22. Натуральное число увеличили на 10% и снова получили натуральное число. Могла ли при этом сумма цифр уменьшиться на 10%?

Занятие 13. Сюжетные задачи на совместную работу

13.1. Малыш съедает банку варенья за 6 мин, а Карлсон – в 2 раза быстрее. За какое время они съедят это варенье вместе?

13.2. Малыш съедает за 24 мины, а Карлсон – за 12 мин. Малыш начал есть первый, а Карлсон присоединился к нему через 6 мин. Через какое время они вдвоем доедят торт? Какая доля торта достанется Малышу?

13.3. (Задача Герона Александрийского) Из-под земли бьют четыре источника. Первый заполняет бассейн за 1 день, второй – за 2 дня, третий за 3 дня, четвертый – за 4 дня. За сколько времени наполнят бассейн все четыре источника?

13.4. Из горячего крана ванна наполняется за 23 мин, из холодного – за 17 мин. Катя открыла горячий кран. Через какое время она должна открыть холодный кран, чтобы горячей воды к моменту наполнения ванны налилось в 1,5 раза больше, чем холодной?

13.5. (Задача Г. Дьюдени) Если полторы курицы несут полтора яйца за полтора дня, то сколько кур плюс еще полкурицы, несущихся в полтора раза быстрее, снесут десяток яиц с половиной за полторы недели?

13.6. (Задача Л. Н. Толстого) Артели косцов надо было скосить два луга, один из которых вдвое больше другого. Половину дня вся артель косила большой луг. После полудня артель разделилась пополам: первая половина осталась на большом лугу и докосила его к вечеру до конца, а вторая половина косила малый луг, на котором к вечеру остался участок, скошенный на другой день одним косцом, проработавшим целый день. Сколько косцов было в артели?

13.7. За пять недель пират Ерема способен выпить бочку рома. А у пирата у Емели ушло б на это две недели. За сколько дней прикончат ром пираты, действуя вдвоем?

13.8. Двое очистили 400 картофелин. Первый очищал 3 штуки в минуту, второй – 2 штуки. Второй работал на 25 мин больше, чем первый. За какое время каждый может окончить работу без помощи другого?

13.9. Три брата Иван, Петр и Николай возвращались домой с рыбалки, где их ожидал бочонок кваса. Иван шел вдвое медленнее Петра и втрое медленнее Николая. Николай пришел домой первым, принялся за квас, и к приходу Петра выпил седьмую часть бочонка. Затем пришел Петр, и они стали пить квас уже вдвоем. Известно, что братья пьют квас с одинаковой скоростью. Досталось ли кваса Ивану?

13.10. Два землекопа роют канаву. Один из них за час может прокопать в 2 раза больше, чем другой, а платят им за каждый час работы одинаково. Что обойдется дешевле: одновременная работа землекопов с двух сторон «до встречи» или рытье половины канавы каждым из них?

13.11. Трое рабочих роют яму. Они работают по очереди, причем каждый работает столько времени, сколько нужно двум другим, чтобы вырыть половину ямы. Работая так, они вырыли яму. Во сколько раз быстрее они закончили бы работу, если бы работали одновременно?

13.12. Десять бобров рассчитали, что могут построить плотину за 8 дней. Когда они проработали два дня, то выяснилось, что ввиду надвигающегося паводка им надо закончить работу через 2 дня. Сколько бобров им необходимо позвать себе на подмогу?

13.13. Когда у Маши было две взрослых кошки и щенок Барбос, и все они ели поровну, то мешка корма для животных хватало на 6 дней. Барбос вырос, и мешка стало хватать на 4 дня. Потом Маша завела еще собаку Жучку, и мешка корма стало хватать только на 3 дня. Кто ест больше: кошка или собака Жучка, и во сколько раз?

13.14. В фильме «Самогонщики» три приятеля гонят самогон. У Труса течет жидкость крепостью , и стандартная бутыль наполняется за часов, у Балбеса течет жидкость крепостью , и такая же бутыль наполняется за часов, а у Бывалого – за часов соответственно. Для ускорения процесса друзья направили трубки аппаратов в одну бутыль и наполнили ее за сутки. Найдите крепость получившейся смеси.

13.15. Три землекопа подрядились вырыть котлован. Если заболеет Иван, то двое сделают работу за 30 дней, если заболеет Петр – то за 15 дней, а если не придет Андрей – то за 12 дней. Вышел на работу один Андрей. За сколько дней он управится?

13.16. В отаре – 8 овец. Первая съедает копну сена за 1 день, вторая за 2 дня, и так далее, восьмая – за 8 дней. Кто быстрее съест копну сена: первые две овцы или все остальные?

13.17. Мама может прополоть грядку за 7 часов непрерывной работы, а вместе с дочкой – за 5 часов. За какое время справится с работой дочка, если будет полоть грядку одна?

13.18. Чтобы испечь сто блинов, маме требуется 30 мин, а Ане – 40 мин. Андрюша готов съесть 100 блинов за час. Мама с Аней пекут блины без остановки, а Андрюша непрерывно их поедает. Через какое время после начала этого процесса на столе окажется ровно сто блинов?

Занятие 14. Принцип Дирихле

14.1. В ящике лежат 100 черных и 100 белых шаров. Какое наименьшее число шаров надо вытащить наугад, чтобы среди них наверняка было а) 2 шара одного цвета? б) 2 шара белого цвета?

14.2. В ящике лежат 100 белых, 100 красных, 100 синих и 100 черных шаров. Какое наименьшее число шаров надо вытащить, не заглядывая в ящик, чтобы среди них было не меньше, чем 3 шара одного цвета?

14.3. В ящике лежат 111 шариков красного, синего, зеленого и белого цветов. Известно, что если вынуть наугад 100 шариков, то среди них обязательно найдутся четыре шарика разных цветов. Какое наименьшее количество шариков нужно вытащить, чтобы среди них наверняка оказались три шарика разных цветов?

14.4. Докажите, что в Вашей группе найдутся два человека, у которых одинаковое количество друзей среди «одногруппников».

14.5. Десять друзей послали друг другу открытки, по 5 открыток каждый. Докажите, что найдутся двое таких, что а) оба послали открытки друг другу б) один послал другому открытку, а другой ему нет.

14.6. Доказать, что из одиннадцати натуральных чисел всегда можно выбрать два, чтобы разность их делилась на 10.

14.7. Объясните, почему обыкновенную дробь всегда можно представить в виде бесконечной периодической десятичной дроби.

14.8. Докажите, что из любых 11 бесконечных десятичных дробей можно выбрать две, совпадающих в бесконечном числе разрядов.

14.9. Можно ли в клетках квадратной таблицы 8×8 расставить числа 1; –1; 0 так, чтобы все суммы – в каждом столбце, строке и на каждой из двух диагоналей были различны?

14.10. Докажите, что найдется число вида 11×11, кратное 17.

14.11. Может ли число $2\,011^n - 1$ оканчиваться на 2 011 нулей?

14.12. В классе 33 ученика, а сумма их возрастов 430 лет. Докажите, что в классе найдутся 20 учеников, сумма возрастов которых больше 260 лет.

14.13. Докажите, что из 52 целых чисел всегда можно выбрать два числа, сумма или разность которых кратна 100.

14.14. В строку выписано 1 000 натуральных чисел. Докажите, что обязательно найдутся несколько подряд идущих чисел (может быть одно), сумма которых кратна 1 000.

14.15. Можно ли увезти из каменоломни пятьдесят камней, веса которых равны 370 кг, 372 кг, .. , 468 кг, на семи трехтонках?

14.16. В мешке лежит 10 карточек с цифрами от 0 до 9. Какое наименьшее число карточек нужно вынуть из мешка, чтобы из цифр, написанных на них (не обязательно всех), можно было бы составить число, делящееся на 9.

14.17. Десять карточек с номерами от 1 до 10 разложили в десять корзин с теми же номерами. На каждой корзине написали сумму номера карточки, в ней лежащей и корзины. Докажите, что найдутся две суммы, у которых совпадут последние цифры.

14.18. На олимпиаде было предложено 8 задач. Каждый участник решил ровно три из них, причем никакие двое участников не решили более одной общей задачи. Какое наибольшее число участников могло быть на олимпиаде?

14.19. Группа из 21 мальчика получила 200 орехов. Докажите, что как бы ребята ни разделили эти орехи, найдутся двое, которым достанется поровну орехов (может быть, ни одного ореха).

14.20. Сможет ли Петя разложить 44 монеты по 10 карманам так, чтобы количество монет в каждом кармане было бы различным?

14.21. Какое наименьшее число карточек спортлото «6 из 49» надо купить, чтобы наверняка хотя бы на одной угадать хотя бы один номер?

14.22. Известно, что в десятичной записи числа 229 участвуют ровно 9 цифр и все эти числа различны. Докажите, что среди этих цифр есть 0.

Занятие 15. Инварианты

15.1. Некоторое натуральное число умножили на 2, а затем прибавили к нему 1, затем вновь умножили на 2 и прибавили 1, и так много раз. Могло ли в результате получиться число кратное 2 012?

15.2. В одном сосуде имеется 2 л воды, а другой пустой. Из первого сосуда переливают половину имеющейся в нем воды во второй, затем из второго переливают треть имеющейся в нем воды в первый, затем из первого переливают четверть имеющейся в нем воды во второй и так далее. Сколько воды будет в первом сосуде после 2 012-го переливания?

15.3. Лист бумаги разрезали на 4 части, потом некоторые (а может быть и все) из этих частей тоже разрезали на 4 части и так далее. Могло ли в результате получиться ровно 50 кусочков бумаги?

15.4. В последовательности цифр 1, 9, 7, 5, 2 каждая цифра, начиная с пятой равна последней цифре суммы предыдущих цифр. Встретится ли в данной последовательности набор цифр 1 234 или 7 485?

15.5. На доске выписаны числа от 1 до 2 011. За один шаг стирают два числа и вместо них пишут модуль их разности. Через 2 010 шагов на доске останется одно число. Может ли этим числом быть 0?

15.6. У числа 2 012! вычислили сумму цифр. У полученного числа опять вычислили сумму цифр. И так продолжали до тех пор, пока не получилось однозначное число. Что это было за число?

15.7. На столе стоит 6 стаканов. Из них пять стоят правильно, а один перевернут донышком вверх. Разрешается переворачивать одновременно 4 любых стакана. Можно ли все стаканы поставить правильно?

15.8. На прямой отметили несколько точек. Затем между соседними точками поставили еще по точке. И так далее несколько раз, после чего все отмеченные точки подсчитали. Могло ли при этом получиться число 2 012?

15.9. В каждой вершине куба записано число. За один шаг разрешается к каждому из двух чисел, находящихся на концах одного (любого) ребра, прибавить по единице. Можно ли за несколько таких шагов добиться того, чтобы все восемь чисел стали между собой равны, если вначале они были поставлены как а) на рис. 1?; б) на рис. 2?

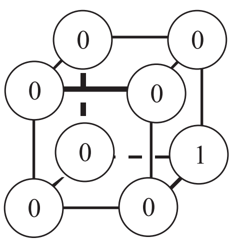


Рис. 1

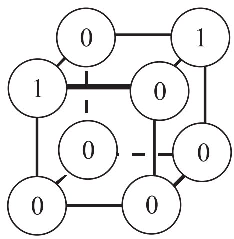


Рис. 2

15.10. В алфавите языка племени УЫУ всего две буквы: У и Ы, причем если из слова выкинуть сочетание букв УЫ, то смысл его не изменится. Смысл слова не изменится и при добавлении в любое место слова буквосочетаний ЫУ или УУЫЫ. Верно ли, что слова УЫЫ и ЫУУ имеют одинаковый смысл?

15.11. На доске написаны три целых числа A, B, C. В следующей строке под ними пишут разности $A - B$; $B - C$; $C - A$ и так далее, до пятой строки включительно. Подберите числа *A, B и C* так, чтобы в пятой строке было число 1 998. Можно ли подобрать числа так, чтобы в пятой строке получилось число 1 997?

15.12. На доске написаны числа 1, 2, 3, ... 20. Разрешается стереть любые два числа и , и вписать вместо них число $a + b - 1$. Какие числа могут получиться после 19 таких операций?

15.13. С последовательностью их 100 нулей и единиц можно проводить две операции: 1) заменять первое число (с нуля на единицу и наоборот); 2) заменять таким же образом число, стоящее за первой единицей. Любую ли последовательность цифр можно получить с помощью этих операций?

15.14. На складе было 7 ящиков. В некоторые из них положили еще 7 ящиков и так несколько раз. В итоге стало 10 непустых ящиков. Сколько всего стало ящиков?

15.15. В таблице 4 × 4 можно менять местами строки и можно менять местами столбцы. Можно ли получить из первой таблицы вторую?

1	1	0	0
1	1	0	0
0	0	1	1
0	0	1	1

1	1	0	0
0	1	1	0
0	0	1	1
1	0	0	1

15.16. В колонию, состоящую из 200 бактерий, попадает один вирус. В первую минуту он уничтожает одну бактерию, затем делится на два новых вируса, и одновременно каждая из оставшихся бактерий тоже делится на две новые. В следующую мину возникшие два вируса уничтожают две бактерии, и затем оба вируса и все оставшиеся бактерии снова делятся и так далее. Будет ли эта колония жить бесконечно долго? Если она все же погибнет, то когда?

15.17. На новогодней елке повесили гирлянду из 12 ламп, расположенных по кругу. За один щелчок выключателя можно изменить состояние любых трех из них: те, что не горели включить, а те, что горели – выключить. Вначале горит одна лампа. Какое наибольшее количество ламп может гореть на этой гирлянде одновременно?

15.18. На доске написано число 19921993…20012002. Разобьем произвольным образом его десятичную запись на два числа и сложим их. С полученным числом проделаем аналогичную операцию и так далее, до тех пор, пока не получится однозначное число. Какое число может получиться?

15.19. Дано несколько (не менее двух) ненулевых чисел. Вместо любых двух чисел a и b из этого набора записываются числа $a + b/2$ и $b - a/2$. Затем, эта операция производится с двумя произвольными числами из получившегося набора, и так далее. Докажите, что после нескольких таких операций нельзя вновь получить исходный набор чисел.

15.20. В одной клетке квадратной таблицы 4×4 стоит знак минус, а в остальных стоят плюсы. Разрешается одновременно менять знак во всех клетках, расположенных в одной строке или в одном столбце. Докажите, что, сколько бы мы ни проводили таких перемен знака, нам не удастся получить таблицу из одних плюсов.

Занятие 16. Календарные задачи

16.1. Дата 22.01.2012, записанная восемью цифрами обладает интересной особенностью: переставив первые четыре цифры можно получить номер года. А какие еще даты в 2012 г. обладают таким же свойством?

16.2. Некий древний грек родился 7 января 40 г. до нашей эры, а умер 7 января 40 г. нашей эры. Сколько лет он прожил?

16.3. Мой друг Дмитрий Николаевич большой любитель занимательных задач. Как-то в компании его спросили, когда у него день рождения. Вот что он ответил: «Мне не более тридцати лет, и родился я в среду не менее 20 лет назад. Была осень. Причем сред, четвергов и пятниц (включая мой день рождения) до конца месяца оставалось девять, а сумма их дат равнялась 207». Поразмыслив, я смог определить дату рождения моего друга. Определите и вы. Ответ объясните.

16.4. Какой сегодня день недели, если известно, что «когда послезавтра станет вчера, то сегодня будет так же далеко от воскресенья, как тот день, который был сегодня, когда вчера было завтра»?

16.5. Пятеро друзей встретились в один из дней школьных каникул и стали спорить. Андрей сказал: «Позавчера была пятница». Володя сказал: «Послезавтра будет вторник». Сережа сказал: «Вчера была суббота». Дима сказал: «Завтра будет понедельник». Егор сказал: «Сегодня четверг». Один из них ошибся. Кто?

16.6. Может ли в каком-либо месяце быть 5 понедельников и 5 четвергов?

16.7. В некотором месяце три среды пришлись на четные числа. Какого числа в этом месяце будет второе воскресенье?

16.8. В некотором месяце понедельников больше, чем вторников, а воскресений больше, чем суббот. Какой день недели был пятого числа этого месяца. Мог ли этот месяц быть февралем?

16.9. Известно, что календари на некоторые годы одинаковы (в них совпадают и числа и дни недели). Сколько различных календарей нужно иметь в архиве, чтобы не покупать новых в течение всего XXI в.?

16.10. Федя как-то сказал: «Позавчера мне было 10 лет, а в следующем году мне исполнится 13 лет». Могло ли это быть правдой?

16.11. 1 января 2007 г. – понедельник. Сколько понедельников в мае 2007 г. придется на четные числа?

16.12. Какой день недели был 1 января, если в январе этого года было четыре пятницы и четыре понедельника?

16.13. Возможно ли, что бы в некотором году 13 число никогда не пришлось бы на понедельник?

16.14. Каким днем недели было 6 июля 1918 г.? Будет 6 июня 2018 г.?

16.15. Какой век короче: двадцатый или двадцать первый?

16.16. Фантастический рассказ начинался словами: «новый век наступил в воскресенье». Может ли так быть?

16.17. С какого дня недели чаще начинается год: с субботы или с воскресенья?

16.18. Деда спросили, сколько лет внуку. Дед ответил, что он прожил столько будних дней, сколько мать его прожила воскресений; столько суток, сколько отец прожил недель, и столько месяцев, сколько бабушка его прожила лет. Всем им без мальчика и дела 100 лет. Сколько лет мальчику?

Занятие 17. Среднее арифметическое

17.1. Лиза поймала больше всех рыб, что составило пятую часть от улова, а Федя – меньше всех, что составило седьмую часть. Сколько было рыбаков?

17.2. Может ли среднее арифметическое 25 целых чисел равняться 6,35?

17.3. Среднее арифметическое шести чисел равно 345, а среднее арифметическое четырех других чисел равно 555. Чему равно среднее арифметическое всех десяти чисел?

17.4. Вес Ани и Тани вместе – 40 кг, Тани и Маши – 50 кг, Маши и Вани – 90 кг, Вани и Димы – 100 кг, Димы и Ани – 60 кг. Каков средний вес а) всех детей; б) мальчиков; в) девочек?

17.5. Средний рост шести друзей – 120 см. Рост Васи – 110 см. Каков средний рост остальных пяти?

17.6. Средний возраст 11 игроков футбольной команды – 22 года. Во время матча Васю позвали к телефону, и он на время ушел с поля. Средний возраст оставшихся игроков – 21 год. Сколько лет Васе?

17.7. Средний вес восьми мешков с картошкой равен 195 кг. Какое наибольшее количество мешков может весить меньше, чем 191 кг?

17.8. Когда Миша поступал в МГУ, учитывали средний балл аттестата о среднем образовании по двенадцати предметам. У Миши средний балл был равен 3 с половиной. По скольким предметам ему нужно было повысить оценку на один балл, чтобы средний балл оказался равен 4?

17.9. Бригада из шести плотников и одного столяра выполнила работу. Плотники получили по 20 руб. каждый, а столяр получил на 3 руб. больше среднего заработка бригады. Сколько получил за работу столяр?

17.10. В классе находятся учитель и несколько учеников. Известно, что возраст учителя на 24 года больше среднего возраста учеников и на 20 лет больше среднего возраста всех присутствующих в классе. Сколько учеников находится в классе?

17.11. На доске написано несколько положительных чисел, каждое из которых равно среднему арифметическому остальных. Сколько различных чисел написано на доске?

17.12. Петя написал на доске строку из 20 чисел. Коля подсчитал, что среднее арифметическое любых трех соседних чисел равно 60. Верно ли, что среднее арифметическое всех чисел равно 60?

17.13. Учительница пересадила Вовочку с первого ряда на второй, Ванечку – со второго ряда на третий, а Машеньку – с третьего ряда на первый. После этого средний возраст учеников, сидящих в первом ряду, увеличился на неделю, сидящих во втором ряду, – увеличился на две недели, а сидящих в третьем ряду, – уменьшился на четыре недели. Известно, что на первом и на втором ряду сидят по 12 человек. Сколько человек сидит в третьем ряду?

17.14. В классе проводили контрольную работу. Оказалось, что средняя оценка у мальчиков 4, у девочек – 3,25; у всех вместе – 3,6. Какую часть класса составляют девочки?

17.15. На ребрах куба расставлены числа 1, 2, 3, ... , 12. Затем на каждой грани записали среднее арифметическое чисел, стоящих в ее вершинах. Могли ли на всех гранях оказаться одинаковые числа?

17.16. Среднее арифметическое цифр числа 2 011 равно 1. Найдите следующее натуральное число с таким же свойством.

Не путать со средней скоростью!

17.17. Дима шел некоторое время со скоростью 4 км/ч, а потом еще столько же времени бежал со скоростью 8 км/ч. Какова его средняя скорость?

17.18. Коля прошел некоторое расстояние со скоростью 4 км/ч, а потом такое же расстояние бежал со скоростью 8 км/ч. Какова его средняя скорость?

17.19. Турист шел 3,5 часа, причем за каждый промежуток времени в один час он проходил ровно 5 км. Следует ли из этого, что его средняя скорость равна 5 км/ч?

Занятие 18. Шахматная доска

18.1. Можно ли разрезать шахматную доску 8×8 на прямоугольники 3×1?

18.2. У шахматной доски 8×8 отпилены два поля: левое нижнее и правое верхнее. Можно ли такую шахматную доску покрыть плитками домино размером 2×1?

18.3. У шахматной доски 8×8 отпилены два поля разного цвета. Докажите, что такую шахматную доску можно покрыть плитками размером 2×1.

18.4. Можно ли шахматную доску с вырезанным угловым полем покрыть одинаковыми прямоугольными «плитками» размером 1×3 клетки?

18.5. Можно ли шахматную доску с вырезанным угловым полем покрыть «уголками»?

18.6. На шахматной доске расставлено 8 ладей так, что они не бьют друг друга (на каждой горизонтали и каждой вертикали стоит по одной ладье). Докажите, что на черных клетках шахматной доски стоит четное количество ладей.

18.7. Сколькими способами можно расставить на шахматной доске 8 ладей, чтобы они не били друг друга?

18.8. Расставьте на шахматной доске 8 ферзей так, чтобы они не били друг друга.

18.9. Расставьте на шахматной доске 3 ферзя и 2 ладьи так, чтобы все остальные поля доски оказались под боем.

18.10. Расставьте на шахматной доске 4 ферзя и коня так, чтобы все остальные клетки доски оказались бы под боем.

18.11. Какое наименьшее количество полей могут бить три ладьи?

18.12. Можно ли шахматного ходом коня обойти все клетки доски, начав с левой нижней клетки и закончив в правой верхней клетке, побывав на каждой клетке доски ровно один раз?

18.13. Можно ли шахматного ходом коня обойти все клетки доски, побывав на каждой клетке доски ровно один раз?

18.14. Король обошел всю доску, побывав на каждом поле ровно по одному разу, и вернулся последним ходом на исходное поле. Докажите, что он сделал четное число ходов по диагонали.

18.15. Шахматная фигура «Хромой король» может ходить на одну клетку вверх, или на одну клетку вправо, или на одну клетку по диагонали влево вниз. Может ли «Хромой король», начиная из левого нижнего угла доски 8×8 клеток, обойти всю доску, побывав на каждой клетке ровно по одному разу?

18.16. Какое наибольшее число полей можно отметить на шахматной доске так, чтобы с любого из них на любое другое отмеченное поле можно было пройти ровно двумя ходами коня?

18.17. Как шахматному коню обойти все поля шахматной доски, побывав на каждом поле ровно один раз?

18.18. Поставим на шахматную доску пешку. Может ли конь, помещенный на одну из свободных клеток, обойти все остальные клетки и вернуться на исходную, побывав на каждом свободном поле ровно один раз?

18.19. На шахматной доске стоит 10 белых фигур. Докажите, что можно поставить на доску черного коня, чтобы он не нападал ни на одну из них.

18.20. Какое наибольшее количество клеток можно отметить на доске, чтобы с любой из них на любую другую отмеченную клетку шахматный конь мог перейти за 2 хода?

Занятие 19. Плюс, минус, больше, меньше

19.1. Дано 2 011 чисел. Известно, что сумма любых четырех из них положительна. Верно ли, что сумма всех чисел положительна?

19.2. Верно ли, что если к отрицательному числу прибавить его квадрат, то всегда получится положительное число?

19.3. Известно, что сумма любых трех чисел, стоящих рядом, больше нуля. Можно ли утверждать, что сумма всех 20 чисел больше нуля?

19.4. Квадрат 5×5 заполнен числами так, что произведение чисел, стоящих в каждой строке отрицательно. Верно ли, что обязательно найдется столбец, в котором произведение чисел отрицательно?

19.5. Известно, что числа $x + y$ и $4x + y$ положительны. Может ли число 8x + 5y быть отрицательным?

19.6. Известно, что числа $3x + y$ и $4x + y$ положительны. Может ли число $6x + 5y$ быть отрицательным?

19.7. В клетках квадрата 3×3 расставлены целые числа так, что сумма чисел в любом уголке из трех клеток неотрицательна. Может ли сумма всех чисел в квадрате быть отрицательной?

19.8. В клетках квадрата 4×4 расставлены целые числа так, что сумма чисел в любом уголке из трех клеток неотрицательна. Может ли сумма всех чисел в квадрате быть отрицательной?

19.9. В каждой клетке квадратной таблицы 3×3 расставлены числа. Может ли сумма чисел в любом квадрате 2×2 быть отрицательной, а сумма чисел во всей таблице – положительной?

19.10. В таблице 4×4 расставьте 16 чисел так, чтобы сумма чисел на любой горизонтали, вертикали или диагонали равнялась нулю.

19.11. Существует ли последовательность из 16 целых чисел, у которой сумма любых 7 идущих подряд членов последовательности отрицательна, а сумма любых 11 идущих подряд членов последовательности положительна? Тот же вопрос для 17 целых чисел.

19.12. Сумма нескольких чисел равна 1. Может ли сумма их квадратов быть меньше 0,01?

19.13. За тетрадь, ручку и карандаш заплатили 120 руб., а за 5 тетрадей, 2 ручки и 3 карандаша – 350 руб. Что дороже: две тетради или ручка?

19.14. В некотором царстве доля блондинов среди голубоглазых больше, чем доля блондинов среди всех его жителей. Что больше: доля голубоглазых среди блондинов или доля голубоглазых среди всех жителей царства?

19.15. Сравните числа:

а) $\dfrac{2011}{2012}$ и $\dfrac{2012}{2013}$; б) $\dfrac{1}{1001}+\dfrac{1}{1002}+\ldots+\dfrac{1}{2000}$ и $\dfrac{1}{2}$.

19.16. Сравните числа:

а) 31^{11} и 17^{14}; б) 2^{300} и 3^{200}.

19.17. Сравните числа $123467 \cdot 1234679$ и 123468^2.

19.18. Сравните числа $\dfrac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot 99}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 100}$ и $\dfrac{1}{10}$.

19.19. Известно, что $5(a-1) = b + a^2$. Сравните числа a и b.

19.20. В прямоугольной таблице 20×10 (20 строк, 10 столбцов) записаны числа. В каждой строке выбрано наименьшее число, затем среди этих (наименьших в строке) чисел выбрано наибольшее. В каждом столбце выбрано наибольшее число, затем среди этих (наибольших в столбце) чисел выбрано наименьшее. Получилось два различных числа. Какое из этих чисел больше?

Занятие 20. Диофантовы уравнения и неравенства

20.1. Решите уравнение в натуральных числах:

а) $x+\dfrac{1}{y+\dfrac{1}{z}}=\dfrac{10}{7}$; б) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=1$;

в) $xyz=x+y+z$; г) $1!+2!+\ldots x!=y^2$

20.2. Решите уравнение в целых числах:

а) $xy=x+y$; б) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{14}$; в) $\dfrac{xy}{z}+\dfrac{xz}{y}+\dfrac{zy}{x}=3$;

г) $6x^2+5y^2=74$; д) $1+x+x^2+x^3=2^y$.

20.3. Выясните, сколько решений в натуральных числах имеет уравнение

а) $2^x+2^y=2^z$; б) $x^3+y^4=z^5$;

в) $x^2-2y^2=1$; г) $x^{2+}y^2+z^2-xy+yz+zx=3$.

20.4. Докажите, что уравнение $x^2+y^2=3z^2$ не имеет решений в целых числах.

20.5. Существуют ли натуральные числа x, y и z, удовлетворяющие уравнению $28x+30y+31z=365$?

20.6. Пятачку на день рождения подарили несколько разноцветных шариков, причем красных шариков среди них было 45%. После того, как Пятачок отдал один синий и один зеленый шарики Ослику Иа-Иа, красных шариков стало ровно половина. Сколько шариков подарили Пятачку?

20.7. Вчера число учеников, присутствующих в классе, было в восемь раз больше числа отсутствующих. Сегодня не пришли еще два ученика, и оказалось, что отсутствуют 20% от числа учеников, присутствующих в классе. Сколько всего учеников в классе?

20.8. Вера и Аня посещают математический кружок, в котором больше 91% мальчиков. Каково наименьшее возможное количество участников кружка?

20.9. На поляне пасутся 150 коз. Поляна разделена изгородями на несколько участков. Ровно в полдень некоторые козы перепрыгнули на другие участки. Пастух подсчитал, что на каждом участке количество коз изменилось в 7 раза. Докажите, что он ошибся.

20.10. Докажите, что если сумма двух натуральных чисел меньше 13, то произведение их не больше 36.

20.11. Школьник хочет пойти в кино. Он знает, что первый сеанс начинается между 12 и 13 часами, а второй – между 13 и 14 часами. Последний сеанс начинается в 23 часа 05 мин. Промежутки времени между началом любых двух последовательных сеансов одинаковы. Когда начинается предпоследний, шестой сеанс?

20.12. В некотором стаде сороконожек и трехголовых драконов всего 26 голов и 298 ног. У каждой сороконожки одна голова. Сколько ног у трехголового дракона?

20.13. Девять коробков спичек стоят 9 руб. с копейками, а десять таких же коробков – 11 руб. с копейками. Сколько стоит один коробок?

20.14. У Пети были монеты достоинством в 1 рубль и 1 копейку, причем копеек было меньше, чем на рубль. Покупая продукты, Петя потратил половину всей суммы. После этого у него снова оказались только рубли и копейки, причем копеек оказалось столько, сколько вначале было рублей, а рублей оказалось вдвое меньше, чем вначале было копеек. Сколько денег было у Пети первоначально?

20.15. Купили несколько одинаковых книг и одинаковых альбомов. За книги заплатили 10 руб. 56 коп. Сколько купили книг, если цена одной книги более чем на рубль превосходит цену альбома, а книг купили на 6 больше, чем альбомов?

20.16. Известно, что 175 Шалтаев стоят дороже 125 Болтаев, но дешевле 126 Болтаев. В кошельке 80 коп. Достаточно ли 80 коп. для покупки 3 Шалтаев и 1 Болтая?

20.17. У двух братьев было стадо овец. Они продали его и за каждую овцу получили столько рублей, сколько голов было в стаде. Стали делить выручку: Петру – десятку, Ивану – десятку, Петру – десятку, Ивану – десятку. И так далее. Наконец, Петр взял последние 10 руб., а Ивану не хватило нескольких рублей до десятки. Тогда Петр вынул из кармана нож и отдал брату в качестве компенсации за недостающую сумму денег. Сколько стоил нож?

20.18. На базаре продаются рыбки – маленькие и большие. Одна большая рыбка стоит 3 рубля, а три маленьких – 1 рубль. Куплено 100 рыбок за 100 рублей. Сколько среди них маленьких, а сколько – больших?

Занятие 21. Рациональные вычисления

21.1. Сократите дроби:

а) $\dfrac{37373737}{81818181}$; б) $\dfrac{254\cdot 399-145}{254+399\cdot 253}$; в) $\dfrac{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}}{2+\frac{2}{3}+\frac{2}{9}+\frac{2}{27}}\cdot\dfrac{4-\frac{4}{7}+\frac{4}{49}}{1-\frac{1}{7}+\frac{1}{49}}$.

21.2. Вычислите:

а) $2379\cdot 23782378-2378\cdot 23792379$;

б) $\underbrace{88\ldots88}_{100\text{цифр}}\cdot\underbrace{33\ldots33}_{100\text{цифр}}-\underbrace{66\ldots66}_{100\text{ цифр}}\cdot\underbrace{44\ldots44}_{100\text{ цифр}}$; в) $2\frac{1}{11}\cdot 2\frac{12}{13}+1\frac{2}{11}\cdot 2\frac{1}{13}+\frac{10}{11}\cdot 7\frac{1}{13}$;

г) $\underbrace{11\ldots11}_{999\text{ цифр}}+\left(\underbrace{33\ldots33}_{999\text{цифр}}\right)^2$; д) $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{3+\dfrac{1}{4+\ddots+\dfrac{1}{2007}}}}+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{3+\dfrac{1}{4+\ddots+\dfrac{1}{2007}}}}$

21.3. Представьте в виде обыкновенной дроби:

а) 2,3(6); б) 0,(7,8); в) 62,0(345).

21.4. Упростите:

а) $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\dfrac{1}{99\cdot 100}$; б) $\dfrac{4}{5\cdot 7}+\dfrac{4}{7\cdot 9}+\ldots+\dfrac{4}{99\cdot 101}$

в) $\frac{7^2}{2\cdot 9}+\frac{7^2}{9\cdot 16}+\ldots+\frac{7^2}{65\cdot 72}$; г) $\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2010}+\sqrt{2011}}$.

21.5. Вычислите значение корня: $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots}}}}$

21.6. Вычислите:
а) 1 + 2 + 3 + ... 2012; б) 1 + 3 + 5 + ... + 2013.

21.7. Вычислите произведение: $\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{2007^2}\right)$.

21.8. Вычислите суммы:
а) $1 + 2 + 3 + \ldots + n$; в); $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$

б) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$; г) $1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + n^4$.

21.9. Упростите выражение:
а) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{100}}$; б) $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{100}$

20.10. Вычислите:
а) $\sqrt{\underbrace{11\ldots11}_{100\text{ цифр}}-\underbrace{22\ldots22}_{50\text{ цифр}}}$; б) $\sqrt{\underbrace{44\ldots44}_{100\text{ цифр}}+\underbrace{11\ldots11}_{51\text{ цифра}}-\underbrace{66\ldots66}_{50\text{ цифр}}}$.

21.11. Можно ли число $1^2 + 2^2 + \ldots + 2001^2$ представить в виде а) 2 000; б) 1 999 различных квадратов натуральных чисел?

21.12. Вычислите: 1 + 11 + ... + 11 ... 11 (в записи последнего числа 100 единиц).

21.13. Можно ли представить 1 в виде суммы а) трех; б) 2 011; в) n различных чисел обратных натуральным?

21.14. Найдите сумму цифр куба числа $\underbrace{99\ldots99}_{100\text{цифр}}$.

21.15. Сколько цифр в числе 2^{100}?

21.16. Придумайте четыре числа, обладающие следующим свойством: если каждое из них уменьшить на 1, то их произведение остается прежним.

21.17. Расставьте скобки в равенстве
1 : 2 : 3 : 4 : 5 :6 : 7 : 8 : 9 : 10 = 7, чтобы оно стало верным.

21.18. Чему равен квадратный корень из числа
1994 • 1995 • 1996 • 1997 + 1?

21.19. Докажите, что, если между каждыми двумя соседними цифрами числа 1 331 вставить одинаковое количество нулей, то полученное число будет полным кубом.

21.20. Представьте в виде произведения двух последовательных натуральных чисел: $\underbrace{11\ldots11}_{100\text{ цифр}}\underbrace{22\ldots22}_{100\text{ цифр}}$.

Занятие 22. Принцип Дирихле (продолжение)

22.1. Плоскость окрашена в два цвета. Докажите, что найдутся две точки на расстоянии 1 метр друг от друга, окрашенные одинаково.

22.2. Плоскость окрашена в два цвета. Докажите, что найдутся две точки на расстоянии 1 метр друг от друга, окрашенные различно.

22.3. Плоскость окрашена в два цвета. Докажите, что найдется равнобедренный треугольник с вершинами одного цвета.

22.4. Окружность окрашена в два цвета. Докажите, что найдется равнобедренный треугольник с вершинами одного цвета, вписанный в эту окружность.

22.5. Плоскость окрашена в три цвета. Докажите, что найдутся две точки на расстоянии 1 метр друг от друга, окрашенные одинаково.

22.6. В квадрате 4×4 моль проела 15 маленьких дырок. Докажите, что из него можно вырезать целый квадрат 1×1.

22.7. В квадрате 5×5 моль проела 9 маленьких дырок. Докажите, что из него можно вырезать неповрежденный уголок из трех клеток.

22.8. Внутри правильного треугольника со стороной 1 расположено 5 точек. Докажите, что найдется две точки, расстояние между которыми меньше 0,5.

22.89. В единичный квадрат бросили 51 точку. Докажите, некоторые три из них можно накрыть кругом радиусом .

22.10. В прямоугольнике 3×4 расположено 6 точек. Докажите, что найдется две точки расстояние, между которыми меньше $\sqrt{5}$.

22.11. В круге радиуса 1 выбраны 34 точки, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Доказать, что существует треугольник с вершинами в этих точках и площадью меньше 0,1.

22.12. Некоторые клетки таблицы 5×5 окрашены, некоторые нет. Докажите, что можно найти четыре клетки, окрашенные одинаково центры, которых образуют прямоугольник.

22.13. На плоскости даны 5 точек с целыми координатами. Докажите, что середина хотя бы одного отрезка имеет целые координаты.

22.14. Можно ли равносторонний треугольник покрыть двумя меньшими равносторонними треугольниками?

22.15. Можно ли квадрат со стороной 1,5 покрыть тремя квадратами со стороной 1?

22.16. Сколько кругов радиуса 1 надо взять, чтобы покрыть ими квадрат со стороной 2?

22.17. Докажите, что у любого многогранника найдутся две грани, являющиеся многоугольниками с одинаковым числом сторон.

22.18. На плоскости выбрано 20 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Существует ли треугольник с вершинами в этих точках и хотя бы одним углом меньшим 10°?

22.19. Коридор длины 6 метров покрыт тремя трехметровыми ковровыми дорожками, причем нигде дорожки не лежат в три слоя. Докажите, что какие-то две из них перекрываются не меньше, чем на 1,5 м.

22.20. Окружность длины 6 м покрыта тремя трехметровыми дугами, никакие две из них не имеют общих точек. Докажите, что какая-то пара дуг имеет пересечение не меньше, чем 1 м.

22.21. Можно ли раскрасить ребра додекаэдра в два цвета так, чтобы по ребрам каждого цвета можно было пройти из любой вершины в любую другую?

Занятие 23. Поиск информации

23.1. Требуется найти общий вес 13 камней, если в Вашем распоряжении имеется прибор, который за одно взвешивание можно узнать массу двух камней (не больше и не меньше!). Можно ли это сделать за восемь взвешиваний?

23.2. В олимпийском турнире участвует 32 боксеров разной силы. Сколько необходимо провести матчей, чтобы наверняка определить а) сильнейшего боксера; б) двух сильнейших?

23.3. Сколько вопросов требуется задать, чтобы отгадать задуманное собеседником натуральное число, не превосходящее а) 64; б) n, если собеседник на все вопросы отвечает только «да» или «нет»?

23.4. За какое наименьшее число вопросов можно отгадать день рождения человека, задавая ему вопросы, если на любой вопрос ответом будет либо «да», либо «нет», но собеседник может один раз соврать?

23.5. Петя загадал одно из чисел 1, 2, 3. Какой вопрос, допускающие ответы «да», «нет» или «не знаю», требуется ему задать, чтобы узнать задуманное число?

23.6. Сколько вопросов требуется задать, чтобы отгадать задуманное собеседником натуральное число, не превосходящее а) 64; б) n, если собеседник на все вопросы отвечает только «да» или «нет», но при этом может один раз соврать?

23.7. И сказал Кощей Ивану-царевичу: «Жить тебе, Ваня, до завтрашнего утра. Утром явишься предо мною. Задумаю три цифры a, b, и c, а ты назовешь мне три числа x, y, z. Выслушаю я тебя и скажу, чему равно выражение $ax + by + cz$. Тогда угадай, какие цифры a, b, и c я задумал. Не угадаешь – голова с плеч...» Опечалился Иван-царевич, стал думу думать. Надо бы ему помочь. Как?

23.8. Вы оказались на острове, население которого состоит из рыцарей (всегда говорят правду) и из лжецов (всегда лгут). Вы встретили на дороге одного из жителей и хотите узнать у него, ведет ли эта дорога в город. Сколько вопросов для этого потребуется задать?

23.9. Полицейский допрашивает большую группу свидетелей, часть из которых – рыцари (всегда говорят правду), остальные лжецы (всегда лгут). Прежде чем начать допрос по существу дела, полицейский хочет выяснить, кто из свидетелей лжет, а кто – говорит правду. Для этого он придумал следующую стратегию. Раз в день он собирает какую-нибудь группу свидетелей (возможно, всех или только одного) и спрашивает каждого из собравшихся, сколько лжецов находится в данной группе. За какое время он может справиться с этой задачей?

23.10. Имеется несколько микросхем, снабженных лампочками, и прибор, предназначенный для их проверки. В прибор можно вставлять две микросхемы за один раз, и тогда на каждой из них может загореться лампочка. Известно, что на исправной микросхеме лампочка загорается только в том случае, если другая вставленная в прибор микросхема неисправна, а на неисправной микросхеме – случайным образом. Известно, что больше половины микросхем – исправные. Можно ли с помощью данного прибора выявить все неисправные микросхемы?

23.11. На столе 15 одинаковых с виду шаров, из которых два – радиоактивных. Требуется с помощью индикатора обнаружить два радиоактивных шара. Измерения можно производить как на отдельно взятом шаре, так и на группе из произвольного количества шаров, однако индикатор указывает лишь на наличие радиоактивности, но не дает информации о количестве радиоактивных шаров в группе. Достаточно ли для этого сделать 7 измерений?

23.12. Из 9 имеющихся монет одна фальшивая. Она легче, но выглядит также как и остальные. Требуется за два взвешивания на чашечных весах без гирь определить, какая именно. Как это сделать?

23.13. Среди 12 монет имеется одна фальшивая. Известно, что вес фальшивой монеты отличается от веса настоящей, но неизвестно легче она настоящей или тяжелее. Все настоящие монеты весят одинаково. С помощью трех взвешиваний на чашечных весах без гирь выделите фальшивую монету и установите, легче она или тяжелее остальных.

23.14. Дано 6 гирь: две зеленых, две красных, две синих. В каждой паре одна гиря тяжелая, а другая легкая, причем все тяжелые гири весят одинаково, и все легкие гири весят тоже одинаково. Можно ли за два взвешивания на чашечных весах найти все тяжелые гири?

22.15. Известно, что настоящие монеты в 1, 2, 3 и 5 коп. весят соответственно 1, 2, 3 и 5 г. Среди четырех монет (по одной каждого достоинства) одна бракованная – отличается весом от настоящей монеты. Можно ли с помощью двух взвешиваний на чашечных весах без гирь определить бракованную монету?

22.16. Имеется 13 одинаковых с виду монет, из которых 7 монет настоящие, а остальные – фальшивые. Все настоящие монеты весят одинаково, а каждая фальшивая – на 1 г легче или тяжелее настоящей. Имеются электронные чашечные весы, которые показывают разность весов грузов на чашках. Эксперт берет наугад одну монету. За какое наименьшее количество взвешиваний он сможет выяснить, фальшивая она или настоящая?

23.17. Имеется набор из 2 007 палочек разной длины. Требуется проверить можно ли из любых трех из них составить треугольник. Какое наименьшее число проверок надо сделать, чтобы ответить на этот вопрос?

23.18. У стены 10 мешков монет, в девяти мешках монеты весом 10 г, в одном – фальшивые весом 11 г. В Вашем распоряжении электронные весы которые показывают точный вес груза, лежащего на чашке весов. Сколько взвешиваний Вам потребуется, чтобы выяснить в каком мешке фальшивая монета? Монет в мешках много, но сколько неизвестно.

23.19. Перед Вами четыре мешка. Известно, что в каждом мешке находятся либо только настоящие монеты весом 10 г, либо только фальшивые – весом 11 г. В Вашем распоряжении электронные весы которые показывают точный вес груза, лежащего на чашке весов. Сколько взвешиваний Вам потребуется, чтобы выяснить в каких мешках фальшивые монеты? Монет в мешках много, но сколько неизвестно.

23.20. Обезьяна хочет определить самый высокий этаж многоэтажного здания, при падении с которого кокосовый орех не разбивается. В ее распоряжении три ореха. Она может уронить орех с любого этажа и подобрать, если он цел. Первый эксперимент показал, что если уронить орех с 11 этажа, то он разбивается. Докажите, что она может узнать требуемое, проведя еще 4 эксперимента.

23.21. Есть 100 монет: 99 настоящих (они весят поровну) и одна фальшивая (весит легче). У Феди двухчашечные весы. На весы можно положить по одной монете и весы показывают один из трех результатов: перевесила левая чашка, либо перевесила правая чашка, либо равновесие. Интересно, но весы всегда показывают неверный результат. Как с помощью таких весов найти 98 настоящих монет?

23.22. Десять внешне одинаковых монет выложены в ряд. Среди них есть две фальшивые монеты, которые лежат рядом. За один раз детектор позволяет определить, сколько фальшивых монет содержится в любом данном наборе. Можно ли обнаружить все фальшивые монеты за два раза?

Занятие 24. Раскраски и покрытия

24.1. В каждой клетке доски 5×5 сидит жук. В некоторый момент все жуки переползли в соседние клетки. Докажите, что некоторая клетка осталась пустой.

24.2. Можно ли сложить замкнутую цепочку из 2 011 одинаковых квадратных плиток?

24.3. Мышка грызет куб сыра размером 3×3, разбитый на 27 единичных кубиков. Мышка начинает с того, что съедает какой-то кубик, затем она переходит к следующему кубику, имеющему общую грань с предыдущим. Может ли мышка съесть весь куб, кроме центрального кубика?

24.4. За какое наименьшее количество выстрелов можно гарантированно уничтожить четырехпалубный корабль в игре «морской бой» на доске 10×10?

24.5. Можно ли доску 10×10 разрезать на 25 тетрамино 1×4?; 25 «Т-тетрамино»? «L-тетрамино»?

24.6. Дно прямоугольной коробки было выложено плитками 2×2 и 1×4. Плитки высыпали из коробки. При этом потеряли одну плитку размером 2×2. Вместо нее купили плитку размером 1×4. Можно ли вновь покрыть дно коробки имеющимся плитками?

24.7. Какое наибольшее число прямоугольных параллелепипедов $1 \times 1 \times 4$ можно выпилить из куба $6 \times 6 \times 6$?

24.8. Можно ли доску 7×7, из которой вырезана угловая клетка разрезать на прямоугольники 1×2, чтобы ровно половина из них была расположена горизонтально?

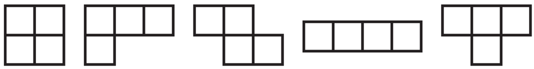
24.9. Можно ли доску 75×75, от которой от противоположных углов которой отпилены два квадрата 3×3, разрезать на прямоугольники 1×2 и (или) пентамино «крест»?

24.10. Шахматная фигура «Верблюд» ходит по доске 10×10 ходом типа 1×3. Можно ли пойти ходом верблюда с какого-нибудь поля на соседнее с ним?

24.11. Из клетчатой доски размером 7×7 вырезана угловая клетка. Можно ли оставшуюся часть покрыть костями домино так, чтобы ровно половина из них располагалась на горизонталях доски?

24.12. Требуется в квадрате 8×8 закрасить несколько уголков из трех клеток так, чтобы нельзя было закрасить еще одного уголка. Если да, какое наименьшее количество уголков для этого понадобится?

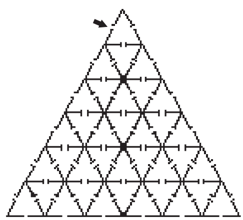
24.13. Можно ли используя ровно по 5 раз каждую из фигур тетриса (см. приведенный ниже рис.) сложить квадрат 10×10?



24.14. Несколько фишек стоят в ряд. Любые две фишки, стоящие через одну, можно менять местами. Удастся ли расположить фишки в обратном порядке?

24.15. Можно ли доску 10×10, от противоположных углов которой отпилены два квадрата 3×3, разрезать на прямоугольники 1×2?

24.16. Кладовая Морского царя состоит из 36 треугольных комнат, соединенных дверями. Привел Морской царь купца Садко в угловую комнату и сказал: в каждой комнате моей кладовой лежит по жемчужине. Собирай жемчужины, но помни, что в любой комнате ты можешь побывать не более одного раза. Если ты выйдешь из кладовой, то войти уже не сумеешь!» Какое наибольшее количество жемчужин может собрать Садко?



24.17. Можно ли шахматную доску размером $n \times 4$ обойти шахматным конем, побывав на каждом поле ровно один раз и последним ходом вернуться на исходное поле?

24.18. Доска 6×6 заполнена домино 1×2. Докажите, что можно провести горизонтальный или вертикальный разрез, не пересекая ни одной домино.

Метод крайнего

24.19. Клетки доски 8×8 раскрашены в шахматном порядке. Одним ходом разрешается перекрасить любую клетку в цвет одной из соседних с ней (т.е. имеющих общую сторону).

Можно ли такими действиями изменить цвет всех клеток на противоположный?

24.20. Можно ли некоторые клетки доски 6×6 окрасить так, чтобы каждая клетка доски (в том числе окрашенная) граничила ровно с одной окрашенной клеткой? Тот же вопрос для доски 7×7.

Занятие 25. Математические игры

25.1. Имеется куча из 31 камня. Двое делают ходы по очереди. Одним ходом разрешается разделить любую из существующих в данный момент куч на две. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре – первый или второй?

25.2. Играют двое. На столе лежат 24 спички. За один ход можно взять со стола 1, 2 или 3 спички. Выигрывает игрок, сделавший последний ход. Кто выигрывает при правильной игре? Как изменится ответ, если спичек 25?

25.3. В крайних клетках полоски 1 на 20 стоят белая и черная шашки. Двое, по очереди, передвигают свою шашку на одну или две клетки вперед или назад, если это возможно (перепрыгивать через шашку нельзя). Проигрывает тот, кто не может двинуть свою шашку. Кто побеждает при правильной игре – первый или второй?

25.4. Кощей Бессмертный и Баба Яга играют в популярную в Муромском лесу игру «Мухоморы». Правила игры: перед игроками лежит две кучи мухоморов, игроки по очереди берут грибы из куч, причем за один ход можно взять некоторое количество грибов, но только из одной кучи. Пропускать ход нельзя, выигрывает тот, после хода которого, грибов не останется. Кто выиграет при правильной игре, если в одной куче – 100, а в другой 101 гриб, а первой ходит Баба Яга?

25.5. Двое играющих поочередно вынимают шары из двух ящиков. В свой ход каждый может брать из любого (только одного) ящика произвольное число шаров. Выигрывает тот, кто берет последний шар. Кто выигрывает при правильной игре, и как следует играть, чтобы выиграть?

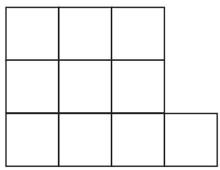
25.6. В строке написано несколько минусов. Двое, по очереди, переправляют один или два соседних минуса на плюс.

Выигрывает тот, кто переправит последний минус. Кто выиграет при правильной игре? (перепрыгивать через шашку нельзя). Проигрывает тот, кто не может двинуть свою шашку.

25.7. Две девочки по очереди обрывают лепестки у ромашки. За один ход можно оторвать один лепесток или два соседних. Выигрывает девочка, сорвавшая последний лепесток. Кто выигрывает при правильной игре?

25.8. Двое по очереди кладут одинаковые монеты на круглый стол так, чтобы монеты не падали и не задевали друг друга. Выигрывает тот, кто делает последний ход. Кто выигрывает при правильной игре, первый или второй, и какова должна быть выигрышная стратегия?

25.9. К доске для игры в крестики-нолики добавлена одна клетка. Как нужно играть первому игроку, чтобы наверняка обеспечить себе выигрыш?



25.10. Докажите, что при игре в «двойные шахматы» (ходы делаются по обычным правилам, но каждый игрок делает 2 хода подряд) белые, как минимум, могут не проиграть.

25.11. Вася и Маша пишут 20-значное число, употребляя только цифры 1, 2, 3, 4 и 5. Первую цифру пишет Вася, вторую – Маша и так далее. Может ли Маша добиться, чтобы полученное число было кратно 9, если Вася стремится ей помешать?

25.12. В куче 25 камней. Игроки берут по очереди 2, 4 и 7 камней. Проигрывает тот, кому некуда ходить. Кто победит?

25.13. Двое играющих вычеркивают по очереди одно число из ряда 1, 2, ... 27 до тех пор, пока не останется два числа. Если их сумма кратна 5, то выиграл первый, иначе – второй. Кто выиграет при правильной игре?

25.14. Ладья стоит в правом верхнем углу прямоугольной шахматной доски размером $m \times n$. Два игрока делают ходы по очереди. Одним ходом разрешается двинуть ладью на несколько полей вниз или влево. Проигрывает тот, кто не может сделать хода. Кто побеждает при правильной игре?

25.15. Двое по очереди ставят ладьи на шахматную доску. Выигрывает тот, при ходе которого все клетки доски оказываются побитыми поставленными фигурами. Кто выигрывает в этой игре, если оба играют наилучшим образом?

25.16. Двое по очереди ставят на шахматную доску коня, причем его можно ставить на любую незанятую клетку, которая не бьется ни одним из стоящих коней. Тот, кто не может поставить коня, проигрывает. Кто победит при правильной игре?

25.17. На доске написаны шесть равенств. Двое играют в следующую игру. По очереди, они записывают вместо звездочек числа. Первый стремиться сделать так, чтобы все равенства были верными, второй стремится ему помешать. Кто победит при правильной игре?

$$\begin{cases} * = * \\ * = * + * \\ * = * + * + * \\ * = * + * + * + * \\ * = * + * + * + * + * \\ * = * + * + * + * + * + * \end{cases}$$

25.18. Два кота играют в игру: по очереди откусывают от связки сосиски. За один ход можно откусить одну, две или три сосиски, но не столько, сколько откусил соперник предыдущим ходом. Проигрывает тот, кто не может сделать хода. В связке 2 012 сосисок. Кто выиграет при правильной игре?

25.19. На столе лежат 100 спичек. За ход разрешается взять со стола несколько спичек, но не более половины лежащих на столе. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

25.20. Двое по очереди берут камни из кучи, в которой 2 007 камней. Разрешается брать любую степень двойки (1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1 024). Взявший последний камень выигрывает. Кто может обеспечить себе победу вне зависимости от игры соперника?

Занятие 26. Турниры

26.1. В круговом турнире участвовало 7 человек. Сколько партий они сыграли?

26.2. Сколько команд участвовало в круговом турнире, если всего там было сыграно 190 партий?

26.3. В турнире, проходящем по круговой системе (каждый должен сыграть с каждым по одной партии), семь участников. Андрей сыграл 6 партий, Борис – 5 партий, Вася и Гена – по три, Дима и Женя – по две, а Захар – одну. С кем успел сыграть Вася? Ответ объясните

26.4. В круговом турнире два участника покинули соревнования после пятого тура. В итоге в турнире было сыграно 38 партий. Успели ли эти двое сыграть между собой?

26.5. В круговом турнире с 5 участниками только Ваня и Леша сыграли одинаковое количество матчей, а все остальные разное. Сколько партий сыграли Ваня и Леша?

26.6. В турнире 18 команд прошло 8 туров. Докажите, что найдутся три команды, не сыгравшие между собой ни одного матча.

26.7. В турнире участвует 20 команд. Могло ли так оказаться, что каждая команда, участвующая в турнире, выиграла столько же матчей, сколько сыграла вничью?

26.8. В круговом турнире участвуют 7 команд, и каждая команда сыграла с каждой ровно один раз. Каждую встречу судил один судья, и все судьи судили одинаковое количество встреч. Встречи «Спартака» судили все судьи, а встречи «Динамо» не все. Сколько могло быть судей?

26.9. Во время турнира выяснилось, что несколько команд сыграли каждый нечетное количество матчей. Докажите, что число таких команд четно.

26.10. Докажите, что в любой момент турнира по футболу есть две команды, сыгравшие одинаковое количество матчей.

Шахматные турниры

26.11. В турнире Петя набрал в 10 раз больше очков, чем Вася. При каком наименьшем количестве участников это могло быть?

26.12. В турнире участвовали 8 игроков. Они набрали соответственно 7, 6, 4, 4, 3, 2, 1,5 и 0,5 очков. Сколько очков игроки, занявшие первые четыре места, потеряли во встречах с остальными?

26.13. В турнире участвовали 8 игроков, и все они набрали разное количество очков. Шахматист, занявший второе место, набрал столько же очков, сколько четыре последних вместе. Как сыграли между собой шахматисты, занявшие третье и седьмое места?

21.14. В шахматном турнире участвовали два ученика 7 класса и некоторое число учеников 8 класса. Два семиклассника набрали 8 очков, а все восьмиклассников набрали очков поровну. Сколько восьмиклассников участвовало в турнире?

21.15. Три шахматиста *A*, *B* и *C* сыграли матч-турнир (каждый с каждым сыграл одинаковое количество партий). Могло ли так случиться, что по числу очков *A* занял первое место, *C* – последнее, а по числу побед, наоборот: *A* занял последнее место, *C* – первое?

26.16. Четверть участников шахматного турнира составляют гросс-мейстеры, остальные – мастера. Турнир закончился, и выяснилось, что мастера в сумме набрали в 1,2 раза больше очков, чем гроссмейстеры. Сколько шахматистов участвовало в турнире?

Футбол-хоккей

26.17. В первенстве школы по футболу участвовали 6 команд. Может ли так оказаться, что команда, набравшая больше всех очков, одержала наименьшее количество побед?

26.18. Восемь команд в хоккейном турнире определяют четыре команды, выходящие в следующий круг. Сколько очков гарантирует команде выход в финальную четверку?

26.19. На международном турнире по футболу были зафиксированы следующие результаты (победа давала 2 очка, ничья – 1 очко, за поражение – 0):

	Сыграно	**Победы**	**Ничьи**	**Поражения**	**Очки**	**Мячи**
Шотландия	3	3	0	0	6	7–1
Уэльс	3	1	1	1	3	3–3
Англия	3	1	1	1	3	2–3
Ирландия	3	0	0	3	0	1–6

Известно, что игра Шотландия–Англия закончилась 3–0. Как закончились остальные матчи?

Занятие 27. Математическая индукция

27.1. Докажите, что любое натуральное число можно представить в виде суммы степеней двойки.

27.2. Докажите, что любую сумму из целого числа рублей, большего семи, можно уплатить без сдачи денежными купюрами в 3 и 5 руб.

27.3. Листок бумаги можно рвать на 4 части или на 6 частей. На какое количество частей его можно порвать?

27.4. На сколько квадратов можно разрезать квадрат?

27.5. На какое число равносторонних треугольников можно разрезать равносторонний треугольник?

27.6. Докажите, что число подмножеств с числом элементов n конечного множества равно 2^n.

27.7. Несколько человек хотят разделить пирог, но при этом они не доверяют друг другу. Докажите, что они могут разделить его так, чтобы все остались довольны.

27.8. В разных местах кольцевой дороги стоят несколько одинаковых автомашин. Если бы весь бензин, имеющийся в этих автомашинах слить в одну, то эта автомашина смогла бы проехать круг по всей кольцевой дороге. Докажите, что по крайней мере одна из машин может проехать полный круг, забирая по пути бензин у остальных машин.

27.9. При каком количестве участников в турнире без «ничьих» возможна ситуация, когда участники набрали одинаковое количество очков?

27.10. Докажите, что по окончании кругового турнира его участников можно перенумеровать так, чтобы ни один из участников не проиграл непосредственно следующему за ним.

27.11. В некотором царстве любые два города соединены каналом или шоссе. Докажите, что из любого города в любой можно доплыть на лодке или приехать в автомобиле.

27.12. Несколько прямых делят плоскость на части. Докажите, что эти части всегда можно раскрасить в шахматном порядке так, чтобы части, имеющие общую границу были окрашены в разные цвета.

27.13. Из квадрата $1\,024 \times 1\,024$, нарисованного на клетчатой бумаге, вырезали одну клетку. Всегда ли можно разрезать его на уголки из трех клеток?

27.14. Несколько прямых делят плоскость на части. Каждая прямая заштрихована с одной стороны. Докажите, что все границы одной из частей заштрихованы изнутри.

27.15. Докажите, что число 11 ... 11 (3^n единиц) кратно 3^n.

27.16. На острове все страны треугольной формы (границы прямые). Если две страны граничат, то по целой стороне. Докажите, что страны можно раскрасить в 3 цвета так, что соседние по стороне страны будут покрашены в разные цвета.

27.17. В гостиницу приехал путешественник. Денег он не имел, а обладал лишь серебряной цепочкой, состоящей из n звеньев. За каждый день пребывания в гостинице он расплачивался одним звеном цепочки, при этом хозяин предупредил, что согласен взять не более одного распиленного звена. Как путешественнику распилить цепочку, чтобы иметь возможность ежедневно расплачиваться с хозяином?

27.18. Двум математикам сообщили по натуральному числу и сказали, что разность этих чисел равна 1. После этого они по очереди задают друг вопрос: «Знаешь ли ты мое число?». Докажите, что рано или поздно кто-то из них ответит утвердительно.

Занятие 28. Наглядная геометрия (продолжение)

28.1. Две одинаковые змеи начинают заглатывать друг друга с хвоста. Чем это закончится?

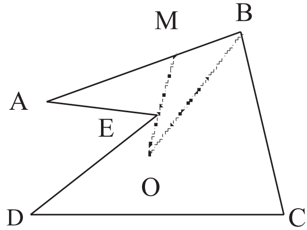
28.2. Как с помощью ломаной, состоящей из четырех звеньев, перечеркнуть все 9 точек, образующих квадрат?

28.3. Решите уравнения: а) $|x-1| = 3$; б) $|x-1| + |x-2| = 1$.

28.4. При каком значении x сумма $|x-1| + |x-2| + |x-3| + |x-4|$ принимает наименьшее значение?

28.5. Допустим, что сейчас угол между минной и часовой стрелкой такой же, как полчаса назад. Найдите все возможные значения этого угла.

28.6. Нарисуйте многоугольник и точку внутри него, чтобы ни одна сторона многоугольника не была видна из этой точки полностью (на рисунке из точки O не полностью видна сторона AB). То же самое, если точка расположена вне многоугольника.



28.7. Можно ли в центры клеток шахматной доски забить 16 гвоздей так, чтобы никакие три гвоздя не лежали на одной прямой?

28.8. Можно ли расставить 7 звездочек в клетки таблицы 4 × 4 так, чтобы при вычеркивании любых двух столбцов и любых двух строк в оставшихся клетках всегда была хотя бы одна звездочка?

28.9. На каждой из планет некоторой солнечной системы находится астроном, наблюдающий ближайшую планету. Расстояния между планетами попарно различны. Докажите, что если число планет нечетно, то какую-нибудь планету никто не наблюдает.

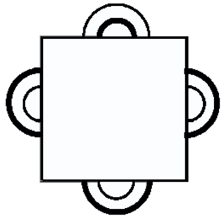
28.10. Окрашенный куб с ребром в 10 см распилили на кубики с ребром в 1 см. Сколько среди них окажется кубиков с одной окрашенной гранью? С двумя окрашенными гранями?

28.11. Если на прямой через равные промежутки поставить 10 точек, то они займут отрезок длины s, если же 100 точек, то отрезок длины s. Во сколько раз s больше s?

28.12. На стол положили несколько одинаковых листов бумаги А 4. Оказалось, что верхний лист покрывает больше половины площади каждого из остальных листов. Всегда ли их можно приколоть одним гвоздем?

28.13. На круглом столе лежит два неодинаковых квадратных блина. Можно ли их разделить на два куска одного размера одним взмахом ножа?

28.14. На столе лежат 6 непересекающихся контуров из проволоки, частично накрытых листом бумаги. Из медной проволоки сделаны три контура (они толще), а еще три – из тонкой алюминиевой. Один из контуров закрыт полностью, а 5 других видны частично. Какой контур закрыт полностью, алюминиевый или медный?



28.15. Можно ли квадратную сетку 4 × 4 сделать а) из 8 кусков проволоки, каждый из которых имеет длину 5?; Б) из 5 кусков проволоки, каждый из которых имеет длину 8?

28.16. Однажды Снежная Королева попросила Деда Мороза расставить в Ледяном дворце 7 елок так, чтобы среди любых трех из них нашлось две на расстоянии 10 шагов друг от друга. Выполнима ли просьба Снежной Королевы?

28.17. Можно ли разрезать квадрат 4 разрезами (по прямым линиям) на 2 треугольника и 8 четырехугольников? Если можно, приведите пример, если нет, объясните почему.

28.18. Можно ли разрезать квадратный лист бумаги со стороной 1 м, на а) 31 квадрат; б) 30 квадратов, так, чтобы хотя бы один из них имел сторону менее 1 мм?

28.19. Существует ли такая фигура, что ее двумя экземплярами можно накрыть круг, а одним нельзя накрыть полукруг?

28.20. Можно ли разрезать прямоугольник 18 × 8 так, чтобы из них можно было сложить квадрат?

Занятие 29. На языке алгебры

29.1. Решите уравнение:

а) $(x-(x-(x-\ldots(x-1))))=1$ (в записи содержится 2 013 пар скобок);

б) ; $$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+x}}}=\frac{53}{37}$$

29.2. Когда у рыбака спросили, как велика пойманная им рыба, он сказал: «Я думаю, что хвост ее весит 1 кг, голова – столько, сколько хвост и половина туловища, а туловище, – сколько голова и хвост вместе». Как велика рыбка?

29.3. Плата работнику в месяц, то есть за тридцать дней, – десять динаров и платье. Он работал три дня и заработал платье. Какова стоимость платья?

29.4. Коробейник продает в электричке шариковые ручки. Он предлагает покупателям либо одну ручку за 5 руб., либо три ручки за 10 руб. От каждого покупателя он получает одинаковую прибыль. Какую?

29.5. За книгу заплатили один рубль, и осталось заплатить еще столько, сколько осталось бы заплатить, если бы за нее заплатили столько, сколько осталось заплатить. Сколько заплатили за книгу?

29.6. Мне сейчас вдвое больше лет, чем вам было тогда, когда мне было столько лет, сколько вам сейчас. Нам обоим вместе сейчас 35 лет. Сколько лет каждому из нас?

29.7. Если от каждого из двух чисел отнять половину меньшего числа, то остаток от большего числа будет втрое больше остатка от меньшего числа. Во сколько раз большее число больше меньшего?

29.8. (Задача И. Ньютона). Некий торговец каждый год тратит на свою семью 100 фунтов, а остальной капитал увеличивает на одну треть. Через 3 года он обнаруживает, что его состояние удвоилось. Сколько денег он имел вначале?

29.9. Первый сплав состоит из цинка и меди, входящих в него в отношении 1:2, а другой сплав содержит те же металлы в отношении 2 : 3. Из скольких частей обоих сплавов можно получить третий сплав, содержащий те же металлы в отношении 17 : 27?

29.10. Говядина без костей стоит 90 руб. за килограмм, говядина с костями – 78 руб. за килограмм, а кости без говядины – 15 руб. за килограмм. Сколько костей в килограмме говядины?

29.11. Из пункта A в пункт B ползут два жука и возвращаются обратно. Первый жук прополз в обе стороны с одинаковой скоростью. Второй полз в B в 1,5 раза быстрее, чем первый, а обратно в 1,5 раза медленней, чем первый. Какой жук вернулся в A раньше?

29.12. Найдите пятизначное число, про которое известно следующее: если к нему приписать слева цифру 6, то получится число в 4 раза большее, чем получилось бы, если цифру 6 приписать справа.

29.13. Первую треть пути автомобиль проехал со скоростью 50 км/ч, вторую – со скоростью 60 км/ч, а третью – со скоростью 70 км/ч. Чему равна средняя скорость автомобиля?

29.14. (По мотивам задачи И. Ньютона) На лугу растет трава. Пустили на луг 9 коров, они опустошили луг за 4 дня. Если бы на луг пустили 8 коров, то они съели бы всю траву за 6 дней. Сколько коров могут кормиться на лугу все время, пока растет трава?

29.15. На дне озера бьют ключи. Стадо из 183 слонов может выпить озеро за один день, а стадо из 37 слонов – за 5 дней. За какое время выпьет озеро один слон?

29.16. Торговец покупает книги по оптовой цене, а продает за 11 долларов. Он подсчитал, что доход от продажи одной книги в процентах равен оптовой цене книги в рублях. Какова оптовая цена одной книги?

29.17. Дед и внук начали одновременно собирать клюкву в одинаковые лукошки. Дед собирает быстрее внука. Когда им нужно поменяться лукошками, чтобы оба лукошка наполнились одновременно?

29.18. Известно, что n кошек за n часов съедят n мышек. Сколько мышек съедят p кошек за p часов?

Занятие 30. Управление ресурсами

30.1. Для окраски одной грани кубика требуется 5 секунд. За какое наименьшее время 3 человека могут окрасить 188 кубиков?

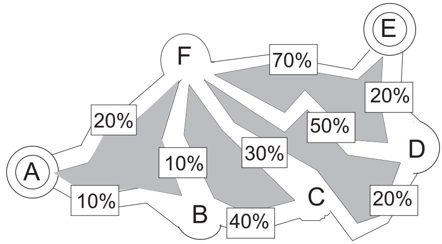
30.2. В пруд выпустили 40 щук. Щука сыта, если она съела трех других щук (сытых или голодных). Какое наибольшее число щук может насытиться?

30.3. Шины на задних колесах грузовика изнашиваются после 15 000 км пробега, а на передних – после 25 000 км. Сколько километров может пройти грузовик без замены шин, если в нужный момент поменять местами передние и задние шины?

30.4. Двое рабочих могут напилить за день 3 поленницы дров, а наколоть – 6 поленниц. Сколько поленниц дров они должны напилить, чтобы успеть наколоть их в тот же день?

30.5. В пещере много золота и алмазов. Полный мешок золота весит 200 кг, полный мешок алмазов 40 кг. Али-Баба может унести за один раз 100 кг. Килограмм золота стоит 20 динаров, килограмм алмазов – 60 динаров. Сколько денег он может получить за золото и алмазы, унесенные в мешке (за один раз)?

30.6. Али-Баба возвращается из Пещеры Сокровищ (точка A) домой (точка E) с мешком, в котором 100 000 золотых монет. На дорогах расположены таможни (на плане – прямоугольники) на которых придется платить таможенный сбор (процент от суммы, провозимой через таможню). Помогите Али-Бабе привезти домой как можно больше золотых монет. Укажите: а) По какому маршруту ему следует ехать? б) Какую наибольшую сумму он может привезти? Ответ обоснуйте.



30.7. В круговом турнире шахматистов (каждый по одному разу играет со всеми остальными участниками, причем за победу дается 1 очко, за ничью – 0,5 очка, за поражение – 0 очков) участвуют 30 человек. Чтобы выполнить норму IV разряда требуется набрать 60% очков. Сколько партий будет сыграно в турнире? Какое наибольшее число шахматистов может стать разрядниками по итогам турнира?

30.8. Несколько ящиков вместе весят 10 тонн, причем, каждый из них весит не более одной тонны. Какое наименьшее количество трехтонок заведомо достаточно, чтобы увезти этот груз?

30.9. Когда-то много лет назад Антон ходил в молочный магазин. Денег у него не было, но были пустые бутылки – 6 литровых (стоимостью 20 коп.) и 6 – поллитровых (стоимостью 15 коп.). В магазине было разливное молоко по 22 коп. за литр. Другой посуды, кроме пустых бутылок, у него нет. Какое наибольшее количество молока он может принести домой?

30.10. Гулливер попал в страну лилипутов, имея 7 000 000 руб. На все деньги он сразу же купил по цене 7 руб. за бутылку, (пустая бутылка стоила в то время 1 руб.). Выпив весь кефир, он сдал бутылки и на все вырученные деньги сразу купил кефир. При этом он заметил, что и стоимость кефира, и стоимость пустой бутылки выросли в два раза. Затем он снова выпил весь кефир, сдал бутылки, и на все вырученные деньги снова купил кефир и так далее. При этом между каждыми двумя посещениями магазина и стоимость кефира, и стоимость пустой бутылки возрастали в два раза. Сколько бутылок кефира выпил Гулливер?

30.11. На одном первобытном базаре шкура мамонта обменивалась на две шкуры саблезубого тигра, а юбка из перьев павлина – на три каменных копья. На другом базаре, который находился в одном дне пути от первого, шкура мамонта обменивалась на три юбки из павлина, а шкура тигра – на четыре копья. Охотник принес на базар шкуру мамонта и хочет выменять ее на четыре тигровых шкуры. Успеет ли он это сделать за 33 дня?

30.12. Папе, маме, сыну и бабушке надо ночью перебраться через мост. У них есть только один фонарь, без которого по мосту в темноте не пройти. К несчастью, мост настолько ветхий, что выдерживает максимум двоих. Еще одна проблема состоит в том, что они могут двигаться с разной скоростью: папа проходит весь мост за 1 мин, мама – за 2 мин, сын – за 5 мин, а бабушка – за 10 мин (двое всегда движутся со скоростью более медленного из них). Смогут ли они все перебраться через мост за 17 мин?

30.13. Трем друзьям требуется преодолеть расстояние 60 км за 3 часа. В их распоряжении двухместный мотоцикл. Как это сделать? Скорость мотоцикла 50 км/ч, скорость пешехода 5 км/ч. На какое наибольшее расстояние они могут уехать при этих условиях?

30.14. Кот Матроскин и почтальон Печкин были в гостях у дяди Федора и теперь возвращаются в Простоквашино. Им надо преодолеть расстояние в 10 км, но на двоих у них имеется один велосипед, без багажника и верхней продольной трубы, так что ехать на нем может кто-то один. Ради справедливости они решили так: один из них едет на велосипеде, через какое-то время слезает, ставит велосипед у дерева и продолжает путь пешком. Второй доходит до велосипеда и садится на него, затем они меняются и так далее. Известно, что на велосипеде они могут ехать со скоростью 10 км/ч, пешком Печкин ходит со скоростью 4 км/ч, а Кот – 5 км/ч. За какое наименьшее время они смогут вернуться домой?

30.15. Перед очередными съемками Волк и Заяц соревнуются в беге на 5,5 км. Известно, что Волк пробегает каждый участок дистанции длиной в 1 км за 8 мин, а Заяц – за 8 мин и 1 сек. Свидетели утверждают, Заяц оказался на финише раньше Волка. Могло ли так случиться?

30.16. Мартышка собрала 100 бананов общим весом 10 кг. Помогите Мартышке накормить этими бананами Слоненка и Удава так, чтобы никто из них не обиделся: они могут обидеться, если один съест бананов хотя бы на 100 г больше другого. (Бананы разного веса: от 20 до 200 г.)

30.17. Путешественник должен пересечь пустыню шириной 80 км. Известно, что день он может пройти 20 км, взяв с собой запас кислорода на 3 дня. Поэтому он должен делать промежуточные станции, оставляя там баллоны с кислородом. Может ли он пересечь пустыню за 6 дней?

30.18. Путешественник хочет пересечь марсианскую пустыню. Его марсоход тратит 1 кг топлива на 100 км пути. В распоряжении путешественника 45 кг топлива, но с собой он может взять не более 15 кг. Докажите, что путешественник может пересечь пустыню шириной 2 300 км. Может ли путешественник пересечь пустыню шириной больше 2300 км?

30.19. Вычеркните из числа 12345678910111213...5960 сто цифр так, чтобы полученное число было наибольшим.

30.20. В прямоугольнике 4 × 100 клеточек Даша закрашивает клеточки в каком-то порядке. Но Миша запретил ей закрашивать клеточку, двумя или более сторонами примыкающую к уже закрашенным клеточкам. Какое максимальное количество клеточек может закрасить Даша?

Занятие 31. Формула Пика

31.1. Найдите площадь треугольника (рис. 1)

31.2. Найдите площадь четырехугольника (рис. 2)

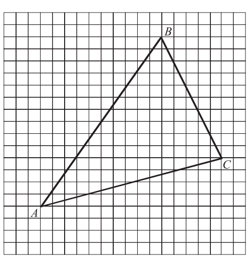


Рис. 1

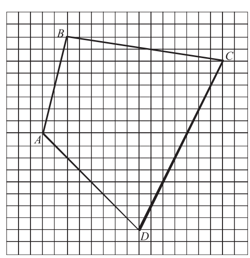


Рис. 2

31.3. Найдите площадь четырехугольника (рис. 3)

31.4. Найдите площадь пятиугольника (рис. 4)

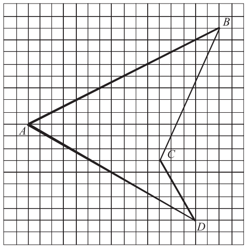


Рис. 3

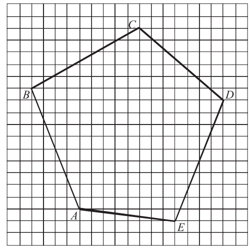


Рис. 4

31.5. На клетчатой бумаге нарисован параллелограмм, вершины которого находятся в узлах сетки. Докажите, что его площадь натуральное число.

31.6. На клетчатой бумаге нарисован треугольник, вершины которого находятся в узлах сетки. Докажите, что его площадь натуральное или «полунатуральное» число.

31.7. Существует ли прямоугольный треугольник с вершинами в узлах сетки, стороны которого непараллельны линиям сетки?

31.8. Существует ли правильный треугольник с вершинами в узлах сетки?

31.9. Существует ли правильный шестиугольник с вершинами в узлах сетки?

31.10. Существует ли правильный многоугольник, отличный от квадрата с вершинами в узлах сетки?

31.11. Можно ли на клетчатой бумаге провести прямую, которая проходит а) не проходит ни через один узел сетки; б) ровно через один узел сетки; б) ровно через два узла сетки?

31.12. В прямоугольнике 7×13, вырезанном из клетчатой бумаги, провели диагональ. Сколько клеток она пересечет?

31.13. Какую наибольшую площадь может иметь фигура на клетчатой бумаге, если ее граница (идущая по линиям сетки) имеет длину не более а) 19; б) 20 клеток?

Формула Пика

Если вершины многоугольника расположены в узлах сетки, при этом внутри многоугольника лежит m узлов, а на границе n узлов, тогда площадь многоугольника равна:

$$S = m + \frac{n}{m} - 1$$

31.14. Проверьте, что формула Пика верна для четырехугольника на рис. 5.

31.15. Проверьте, что формула Пика верна для четырехугольника и для каждого из треугольников на рис. 6.

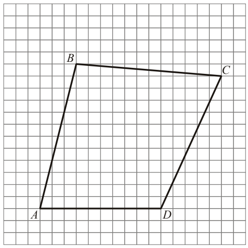


Рис. 5

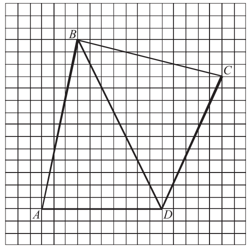


Рис. 6

31.16. Многоугольник M разбит на два многоугольника M_1 и M_2. Докажите, что, если формула Пика верна для многоугольников и , то она верна для многоугольника M.

31.17. Докажите формулу Пика.

Занятие 32. Непрерывность

32.1. Матч хоккеистов «Динамо»–«Спартак» закончился со счетом 8–5. Докажите, что в матче был момент, когда «Динамо» оставалось забить столько шайб, сколько «Спартак» уже забил.

32.2. В ряд стоят 20 сапог: 10 левых и 10 правых. Докажите, что можно найти группу из 10 подряд стоящих сапог, где левых и правых будет поровну.

32.3. Шеренга новобранцев стояла лицом к сержанту. По команде «налево» некоторые повернулись налево, некоторые – направо, а остальные – кругом. Всегда ли сержант сможет встать в строй так, чтобы с обеих сторон от него оказалось поровну новобранцев, стоящих к нему лицом?

32.4. К автомату с газировкой стояла очередь из 100 человек. Газировка бывает двух сортов с сиропом и без сиропа. Самый первый человек купил газировку с сиропом. Второй – без сиропа. Верно ли, что в некоторый момент, людей купивших газировку с сиропом было столько же, сколько собиравшихся купить газировку без сиропа?

32.5. В клетках квадрата 8×8 стоят «+1» и «–1», причем сумма всех чисел равна 0. Докажите, что доску можно разрезать на два куска так, что сумма чисел в каждом из кусков равна 0.

32.6. В некоторых клетках квадрата 10×10 стоят «+1» и «–1», причем сумма всех чисел не больше «20» и не меньше «–20». Докажите, что есть квадрат 5×5, абсолютная величина суммы чисел в котором не превосходит 5.

32.7. Петя выписал на доске несколько чисел так, что любые два соседних отличаются не больше, чем на 1. Самое маленькое из выписанных чисел равно «–5», самое большое 100,25. Докажите, что одно из выписанных чисел отличается от нуля не больше, чем на 0,5.

32.8. Буддийский монах с 6 утра до 6 вечера поднимался на гору и там ночевал. На следующий день с 6 утра до 2 дня он спустился по той же дороге. Докажите, что в пути было такое место, где он находился в одно и то же время и на подъеме и на спуске (монах часто отдыхал и шел неравномерно).

32.9. Из Гавра в Нью-Йорк каждый день в полдень отправляется пароход через Атлантический океан, и в то же самое время пароход той же самой компании отправляется из Нью-Йорка в Гавр. Путь в том и другом направлении занимает 7 дней. Сколько судов своей компании, идущих в противоположном направлении, встречает пароход на пути из Гавра в Нью-Йорк?

32.10. На плоскости отмечены два миллиона точек, никакие три, из которых не лежат на одной прямой. Можно ли провести прямую так, чтобы по каждую сторону от нее находилось бы ровно по одному миллиону таких точек?

32.11. На плоскости расположено 20 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой, из них 10 синих и 10 красных. Докажите, что можно провести прямую, по каждую сторону от которой, лежит 5 синих и 5 красных точек.

32.12. Можно ли провести прямую линию так, чтобы она пересекла все стороны (но не вершины!) 2 011-угольника?

32.13. На шахматной доске проведена прямая. Какое наибольшее число клеток шахматной доски она может пересечь?

32.14. На плоскости расположены 200 точек. Существует ли окружность, внутри которой расположено ровно 100 из них?

32.15. Существует ли функция, график которой на координатной плоскости имеет общую точку с любой прямой?

32.16. Дана выпуклая фигура и точка A внутри нее. Докажите, что найдется хорда (отрезок, соединяющий две граничные точки выпуклой фигуры), проходящая через точку A и делящаяся точкой A пополам.

32.17. Пусть $f(x)$ – квадратный трехчлен, про который известно, что уравнение $f(x) = x$ не имеет корней. Докажите, что тогда и уравнение $f(f(x)) = x$ не имеет корней.

32.18. Существует ли непрерывная функция, принимающая каждое действительное значение ровно 3 раза?

Занятие 33. Процессы и инварианты (продолжение)

33.1. В шеренге 2 012 человек. Разрешается переставлять местами любых двух людей, стоящих через одного. Всегда ли можно ли переставить их по росту?

33.2. На главной диагонали шашечной доски стоит по шашке. За один ход разрешается выбрать две шашки и передвинуть их на одну клетку вниз. Можно ли переставить все шашки на нижнюю горизонталь?

33.3. Каждая из расположенных по кругу 12 ламп может находиться в одном из двух состояний: гореть или не гореть. За один ход можно изменить состояние любых трех ламп, расположенных подряд. Вначале горит только одна лампа. Можно ли добиться того, чтобы горели все лампы?

33.4. В коробке лежат 2 011 белых и 2 012 черных шаров. Наугад вытаскиваются два шара. Если они одного цвета, то их выкидывают и кладут в коробку черный шар. Если они разного цвета, то выкидывают черный шар, а белый кладут обратно. Процесс продолжается до тех пор, пока в коробке не останется один шар. Какого он цвета?

33.5. В таблице 3×3 одна из угловых клеток закрашена черным цветом, все остальные – белым. За один ход можно перекрашивать все клетки какого-нибудь столбца или все клетки какой-нибудь строки. Докажите, что действуя так нельзя добиться того, чтобы все клетки стали белыми.

33.6. На шахматной доске разрешается перекрашивать в другой цвет все клетки, расположенные внутри какого-нибудь квадрата размером 2×2. Может ли при этом на доске остаться ровно одна черная клетка?

33.7. На плоской поверхности льда лежат три шайбы. Хоккеист бьет по одной из шайб так, чтобы она прошла между двумя другими и остановилась в некоторой точке. Могут ли все шайбы вернуться на свои места после 25 ударов.

33.8. В выпуклом пятиугольнике проведены все диагонали. Каждая вершина и каждая точка пересечения диагоналей окрашены в синий цвет. Вася хочет перекрасить эти синие точки в красный цвет. За одну операцию ему разрешается поменять цвет всех окрашенных точек, принадлежащих либо одной из сторон, либо одной из диагоналей на противоположный (синие точки становятся красными, а красные – синими). Сможет ли он добиться желаемого, выполнив какое-то количество описанных операций?

33.9. Василиса Премудрая решила запереть Кощея в прямом коридоре, разделенном тремя проходами на четыре комнаты, причем в каждом проходе, облокотившись на одну из стен, стоит толстый усталый стражник. Каждый раз, когда Кощей переходит из одной комнаты в другую, стражник переходит к противоположной стене и облокачивается на нее. Если все стражники облокотятся на одну стену, она не выдержит и рухнет, а Кощей выйдет на свободу. Может ли Василиса изначально так прислонить стражников и поместить Кощея, чтобы он никогда не смог выбраться?

33.10. На столе рубашкой вниз лежит игральная карта. Можно ли, перекатывая ее по столу через ребро, добиться того, чтобы она оказалась на прежнем месте, но а) рубашкой вверх; б) рубашкой вниз и вверх ногами?

33.11. Во время перемирия за круглым столом разместились рыцари из двух враждующих станов. Оказалось, что число рыцарей, справа от которых сидит враг, равно числу рыцарей, справа от которых сидит друг. Докажите, что число рыцарей кратно 4.

33.12. На острове Серобуромалин живут хамелеоны трех цветов: 13 серых, 15 бурых и 17 малиновых. Если 2 хамелеона разных цветов встречаются, то они оба меняют свой цвет на третий. Может ли случиться, что в некоторый момент все хамелеоны на острове станут одного цвета?

33.13. В квадратной таблице 17×17 закрашены в черный цвет 80 клеток, остальные – белые. Разрешается закрасить строку или столбец в черный цвет, если большинство клеток на этой линии – черные. Докажите, что при помощи таких операций нельзя сделать всю таблицу черной.

33.14. Квадратное поле разбито на 100 одинаковых квадратных участков, девять из которых поросли бурьяном. Известно, что бурьян за год распространяется на те и только те участки, у которых не менее двух соседних (то есть, имеющих общую сторону) участков уже поросли бурьяном. Докажите, что это поле никогда не зарастет бурьяном полностью.

33.15. В трех вершинах квадрата находятся три кузнечика. Они играют в чехарду. При этом если кузнечик A прыгает через кузнечика B, то после прыжка он попадает в точку симметричную A относительно B. Может ли после нескольких прыжков какой-нибудь кузнечик оказаться в четвертой вершине исходного квадрата?

33.16. Четыре кузнечика, сидящих в вершине квадрата 1×1 на клетчатой бумаге играют в чехарду. При этом если кузнечик A прыгает через кузнечика B, то после прыжка он попадает в точку симметричную A относительно B. Могут ли они одновременно оказаться в вершинах квадрата 2×2?

33.17. На 44 деревьях, расположенных по кругу, сидят по веселому чижу. Время от времени какие-то два чижа перелетают на соседнее дерево, один – по часовой стрелке, а другой – против часовой стрелки. Могут ли все чижи собраться на одном дереве?

33.18. На полке стоят тома энциклопедии. Найдя какие-то два тома стоящие неправильно, меняем их местами. Докажите, что через некоторое время тома будут стоять правильно.

33.19. У куба отмечены вершины и центры граней, а также проведены диагонали всех граней. Можно ли по отрезкам этих диагоналей обойти все отмеченные точки, побывав в каждой из них ровно один раз?

33.20. У Носорога на шкуре есть вертикальные и горизонтальные складки. Всего складок 17. Если Носорог чешется боком о дерево, то либо две горизонтальные, либо две вертикальные складки на этом боку пропадают, зато на другом боку прибавляются две складки: горизонтальная и вертикальная. (Если двух складок одного направления нет, то ничего не происходит.) Носорог почесался несколько раз. Могло ли случиться, что на каждом боку вертикальных складок стало столько, сколько там раньше было горизонтальных, а горизонтальных стало столько, сколько там было вертикальных?

Занятие 34. Комбинаторика и вероятности

34.1. Несколько человек встретились и поздоровались друг с другом. Рукопожатий было 120. Сколько было человек?

34.2. Найдите сумму произведений цифр а) всех двузначных чисел; б) всех трехзначных чисел.

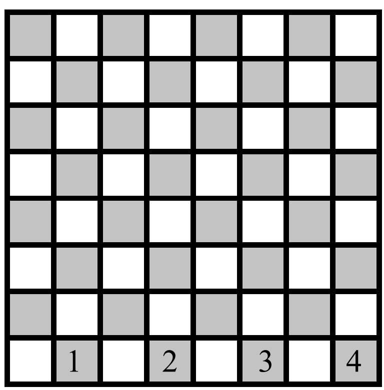
34.3. Найдите сумму: суммы натуральных чисел от 1 до 10, сумму произведений пар произведений натуральных чисел от 1 до 10, сумму произведений всех троек, четверок натуральных чисел от 1 до 10, и так далее. И наконец, произведения натуральных чисел от 1 до 10.

34.4. Восемь рыцарей встречались за круглым столом один раз в год. При этом они соблюдали правило: всякий раз у каждого рыцаря была новая пара соседей. Сколько лет продолжались их встречи?

34.5. Каких натуральных чисел меньших 1 миллиона больше: содержащих в десятичной записи 1 или не содержащих? А меньших 10 миллионов?

34.6. На окружности расположены одна красная точка и 2 007 белых. Рассматриваем всевозможные многоугольники с вершинами в этих точках. Каких среди них будет больше: с красной вершиной или без нее?

34.7. На каждом из четырех отмеченных полей стоит по шашке. Шашка, как известно, стремится «в дамки». Какая из них может проделать этот путь на пустой доске наибольшим числом способов? Чему равно это число для каждой из шашек?



34.8. Грузовик вмещает x кг груза. Известно, что его можно заполнить ровно 109 способами упаковками помидоров по 3 кг и 5 кг. Чему равно x?

34.9. На столе лежит куча из нескольких камней. Ее делят на две меньшие кучи. Затем одну из них снова делят на две кучи и так далее до тех пор, пока не останутся кучи, состоящие только из одного камня. Каждый раз при делении кучи на две количество камней в них перемножают. Докажите, что сумма этих произведений не зависит от порядка дележа.

34.10. Дано 100 чисел. Среди их всевозможных попарных произведений оказалось ровно 962 отрицательных. Сколько среди исходных чисел могло быть нулей?

34.11. Рассеянная секретарша напечатала пять писем пяти лицам и надписала пять конвертов с их адресами. Какова вероятность, что ровно 4 письма будут вложены правильно?

34.12. Шахматист, чтобы получить приз, должен выиграть две игры подряд. Ему осталось сыграть только три партии. В каком порядке ему выгоднее играть: с сильным игроком, затем со слабым, и снова сильным или со слабым, сильным, слабым?

34.13. Федя участвует в двух математических кружках, которые расположены в противоположных концах Москвы. Ехать надо по одной и той же линии метро, но в противоположные стороны. Федя садится в первый приходящий поезд независимо от того, с какой стороны тот пришел. К концу года он обнаружил, что в первом кружке бывал вдвое чаще, чем во втором. Как это могло произойти? Заметим, что школьник попадает в метро не всегда в одно и то же время: иногда немного позже, иногда немного раньше. Поезда проходят в каждом направлении через одинаковые промежутки времени.

34.14. Биологи выловили из пруда 20 рыб, пометили их, и отпустили обратно в пруд. Через месяц они вновь выловили 20 рыб и среди них обнаружили 4 меченых. Оцените число рыб в пруду.

34.15. Вам разрешено положить 10 белых и 10 черных шаров в две урны. Дальше Вы выбираете из одной из урн, выбранной случайным образом шар. Если этот шар окажется белым, Вы выиграли, если черным – проиграли. Как Вы распределите шары в урны?

34.16. Монета несимметрична и имеются веские основания считать, что вероятность выпадения «орла» и «решки» различна. Как с помощью такой «неправильной « монеты бросить жребий, чтобы ни одна из сторон не могла считать себя обиженной?

34.17 Вы и Ваш соперник берете по колоде карт, тщательно перетасовываете и начинаете выкладывать по одной карте. Если ни в одной карте не окажутся совпадающие карты, выигрываете Вы. Если хотя бы один раз будут одинаковые карты, – Ваш соперник. У кого вероятность выигрыша больше?

34.18. Русская рулетка: в соседние гнезда барабана револьвера вставлены два патрона. После этого барабан вращают, приставляют к виску и нажимают курок. Выстрела нет. Как лучше действовать, чтобы с большей степенью вероятности остаться в живых: повернуть барабан или сразу нажать на курок?

34.19. Статистики подсчитали, что в каждой из двух деревень любителей сладостей среди мужчин меньше, чем среди женщин. Можно ли утверждать, что в этих деревнях любителей сладостей среди мужчин вообще меньше, чем среди женщин?

34.20. Правитель некой страны из чисто военных соображений хотел бы, чтобы среди его подданных было больше мальчиков, чем девочек. Под страхом жестокого наказания он повелел, чтобы в каждой семье было не более одной девочки. В результате, у каждой женщины этой страны среди детей последней – и только последней – была девочка, ибо ни одна женщина, родив девочку, не решалась больше иметь детей. Какую же долю составляли мальчики в общей массе детей этой страны, если шансы рождения девочки или мальчика одинаковы?

Занятие 35. Кратчайшие пути и другие экстремумы

35.1. Имеются бревна двух видов: длиной 6 м и 7 м. Их нужно распилить на метровые чурбаки. Какие бревна пилить выгоднее?

35.2. Из 22 спичек сложите контур прямоугольника с наибольшей площадью. Ломать спички нельзя.

35.3. Две деревни находятся на разных берегах реки, берега которой – параллельные прямые. Где следует построить мост, перпендикулярный берегам так, чтобы длина пути из одной деревни в другую была наименьшей?

35.4. Вдоль прямой улицы стоят шесть домов. Где надо вырыть колодец, чтобы сумма расстояний от него до домов была наименьшей?

35.5. Вдоль прямой улицы стоят одиннадцать домов. Где надо вырыть колодец, чтобы сумма расстояний от него до домов была наименьшей?

35.6. Ковбой едет из пункта A в пункт B, но по дороге хочет напоить лошадь в реке. Где он должен это сделать, если он хочет потратить на это меньше времени?

35.7. Ковбой живет на полуострове, имеющем форму острого угла. Каждое утро он совершает прогулку: выходит из дома, идет до одного из берегов полуострова, затем до другого и возвращается домой, двигаясь по самому короткому пути. Как он выбирает путь?

35.8. Четыре дома расположены в вершинах выпуклого четырехугольника. Где следует вырыть колодец, чтобы сумма расстояний от него до домов была наименьшей?

35.9. Расстояние между деревнями A и B равно 3 км. В деревне A – 300 школьников, а в деревне B – 200 школьников. Где следует построить школу, чтобы общее расстояние, пройденное школьниками по дороге в школу, было как можно меньше?

35.10. Найдите длину кратчайшего пути на поверхности прямоугольного параллелепипеда, соединяющего две противоположные вершины.

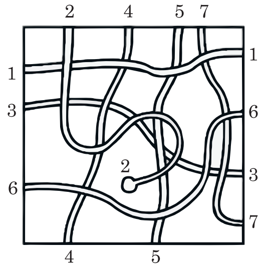
35.11. На середине ребра тетраэдра сидит муравей. Ему требуется переползти в середину противоположного ребра тетраэдра. Найдите кратчайший путь.

35.12. Муравей сидит на внешней поверхности круглого стакана. Ему надо переползти в точку, лежащую на внутренней поверхности стакана. Найдите кратчайший путь. Исследуйте все случаи.

35.13. Из всех прямоугольников одного и того же периметра наибольшую площадь имеет квадрат. Докажите это.

35.14. Имеется линейка без делений длиной 13 см. Сколько промежуточных делений требуется нанести на линейку, чтобы ею можно было измерить расстояния от 1 до 13 см с точностью до 1 см? Число делений должно быть минимальным.

35.15. Лабиринт состоит из семи пронумерованных дорожек (см. приведенный ниже рис.). Требуется окрасить каждую из дорожек в какой-либо цвет, причем ни на одном перекрестке не должны пересекаться дорожки одинакового цвета. Какой минимальный набор красок необходим, и какие дорожки можно окрасить одной и той же краской?



35.16. Три гнома живут в разных домах на плоскости и ходят со скоростями 1, 2 и 3 км/ч соответственно. Какое место для ежедневных встреч нужно им выбрать, чтобы сумма времен, необходимых каждому из гномов на кратчайший путь от своего дома до этого места, была наименьшей?

35.17. В кузове грузовой машины оставили бревно с гвоздем в середине. Бревно при движении свободно каталось и царапало дно. Какая часть кузова может быть испорчена? Размеры кузова: 3×2, бревна 2.

35.18. Четыре поселка расположены в вершинах квадрата со стороной 10 км. Можно ли соединить эти поселки системой дорог так, чтобы общая длина этих дорог была меньше 28 км, и чтобы из каждого поселка можно было проехать в любой другой?

Занятие 36. Задачи-шутки и не совсем шутки

36.1. Сколько яиц можно съесть натощак?

36.2. На дереве сидело 40 сорок. Охотник выстрелил и убил 6 сорок. Сколько сорок осталось на дереве?

36.4. В корзине лежат 5 яблок. Разделите их между пятью лицами, чтобы каждый получил по яблоку, а одно яблоко осталось в корзине.

36.5. Сын отца профессора разговаривает с отцом сына профессора, а профессор в разговоре не участвует. Может ли так быть?

36.6. Два отца и два сына съели за завтраком три яйца, причем каждому досталось целое яйцо. Могло ли так случиться?

36.7. В двух кошельках лежат две монеты, причем в одном кошельке монет вдвое больше, чем в другом. Может ли так быть?

36.8. Представьте себе, что Вы капитан парохода. Ранним августовским утром вы отправляетесь в рейс по маршруту Астрахань–Москва. В трюме парохода – 200 тонн арбузов, 33 центнера рыбы и 499 центнеров помидоров. Сколько лет капитану?

36.9. В детстве любят загадывать загадки. Вот одна из типичных детских загадок: можете ли Вы с трех раз разбить трехлитровую банку с водой об асфальт?

36.10. Сколько граней у шестигранного карандаша?

36.11. Что в России на первом месте, а во Франции на втором?

Вопросы посерьезнее

36.12. Между цифрами 4 и 5 поставьте известный Вам часто использующийся в математике символ, чтобы в результате получилось число больше 4, но меньше 5.

36.13. В неверном равенстве 99 = 102 – 1 передвиньте одну цифру так, чтобы оно стало верным.

36.14. Какие часы чаще показывают точное время: те, которые отстают на одну мину или те, которые стоят?

36.15. Автомобиль едет со скоростью 60 км/час. На сколько должен увеличить скорость, чтобы проезжать один километр пути на мину быстрее?

36.16. Установите закономерность и продолжите последовательность: собака – 3, кошка – 3, корова – 2, петух – 8, ворона – ....

36.17. С какой скоростью должна бежать собака, чтобы не слышать звона сковородки, привязанной к ее хвосту?

36.18. Равенства можно перемножать. Например: 2 руб. = 200 коп., 0,25 руб. = 25 коп. Перемножим эти равенства. Получим: 0,5 руб. = 5 000 коп. В чем ошибка?

Математический фольклор

36.19. Найдите ошибку в доказательстве теоремы:

Теорема: крокодил более длинный, чем широкий.

Доказательство: Возьмем произвольного крокодила и докажем две леммы.

Лемма 1: Крокодил более длинный, чем зеленый.

Доказательство: Посмотрим на крокодила сверху – он длинный и зеленый. Посмотрим на крокодила снизу – он длинный, но не такой зеленый (на самом деле он темно-серый). Следовательно, лемма 1 доказана.

Лемма 2: Крокодил более зеленый, чем широкий.

Посмотрим на крокодила еще раз сверху. Он зеленый и широкий. Посмотрим на крокодила сбоку: он зеленый, но не широкий. Это доказывает лемму 2.

Утверждение теоремы следует из доказанных лемм.

Обратная теорема: «Крокодил более широкий, чем длинный» доказывается аналогично.

Что Вы об этом думаете?

36. 20. Решите серию задач:

а) Сколько бегемотов помещается в пятитонный грузовик?

б) Сколько крокодилов помещается в пятитонный грузовик?

в) Что необходимо сделать, чтобы поместить бегемота в холодильник?

г) Что необходимо сделать, чтобы поместить крокодила в холодильник?

д) Кто первый добежит до реки: бегемот или жираф?

Ответы, решения и указания к некоторым задачам

1.12. Секрет пароля, в количестве букв в словах, обозначающих числа, которые называет часовой.

1.17. Третья черепаха врет.

2.5. За один раз взять половину от каждой таблетки.

2.11. За 10 секунд.

3.11. Да. Вместо того, чтобы получить из числа 4 число 2 007, мы получим из числа 2 007 число 4 с помощью обратных операций: 1) вычеркивание цифры 4 в конце; 2) вычеркивание цифры 0 в конце; 3) умножение числа на 2.

Получим: $2007 \to 4014 \to 401 \to 802 \to 1604 \to 160 \to 16 \to 32 \to \to 64 \to 6 \to 12 \to 24 \to 2 \to 4$.

3.18. Да. Заметим, что всего будет $1 + 2 + 3 + ... + 16$ переворачиваний.

То есть их общее количество – четное. Следовательно, четность количества «орлов» и количества «решек» не поменяется. Пусть в исходном положении «орлов» было нечетное число, а «решек» – четное.

Тогда, в конечном положении все монеты должны лежать «орлом» вверх.

Покажем, как этого добиться. Разобьем ходы на пары по количеству переворачиваний: (1,3), (2,4), (5,7), (6,8), (9,11), (10,12), (13,15), (14,16).

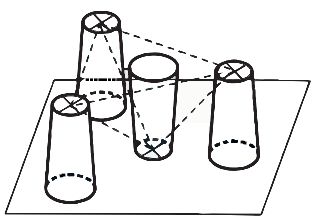
Делаем сразу два хода из каждой пары так: сначала какие-то k монет, а затем эти же k монет и еще две монеты. Таким образом, ровно две монеты поменяют свое положение на противоположное. Так как «решек» четное число, то не более, чем за 8 парных ходов все решки можно сделать «орлами».

Если же для достижения цели требовалось меньшее количество ходов, то несколько первых парных ходов можно сделать «холостыми», поменяв на противоположное положение двух монет – одного «орла» и одной «решки».

Если же первоначально все монеты уже лежали «орлами» вверх, то первым ходом «сделаем» две «решки» и дальше будем действовать аналогично.

4.5. Это не только Северный полюс, как может показаться сначала. Это и точки, лежащие вблизи Южного полюса: это параллель, расположенная на 1 км севернее от параллели длиной 1 км, параллель, расположенная на 1 км севернее параллели длиной 0,5 км и так далее.

4.17. Да, например:



5.8. Число 1 ± 2 ±3 ± 4 ± 5 ± 6 ± 7 ± 8 ± 9 нечетно и поэтому не может равняться 20.

5.18. При любом варианте разбиения одна из сумм содержит нечетное количество ±1, а другая четное и равенство невозможно.

6.6. Нет, так как сумма натуральных чисел от 1 до 12 не кратна 4.

6.15. Это, например, числа 2013! + 2; 2013! + 3; ... ; 2013! + 2013.

7.10. Левая часть равенства при делении на 4 дает остаток 2, а правая кратна 4.

7.16. Квадрат натурального числа не может иметь остатка 2 при делении на 3, а число, сумма цифр квадрата которого равна 1 994, имеет при делении на 3 остаток 2.

8.15. Возраст детей: 1 и 4 года.

Возрасты сыновей могли быть равны, следовательно, произведение возрастов – полный квадрат. Получив информацию о произведении возрастов, второй сыщик не смог ответить на вопрос, следовательно, произведение раскладывается на множители двумя способами.

8.20. Анна рассуждает примерно так: «Если я, Анна, не выгляжу смешной, то Вера должна рассуждать так: если я, Вера, не выгляжу смешной, то Свете не над чем смеяться, но поскольку Вера так не рассуждает, следовательно, я, Анна, выгляжу смешной».

9.14. Пьер родился 23 января, Джон – 24 января. Заметим, что оба рыцаря говорят одни те же высказывания два дня подряд. Поэтому одно из их высказываний ложно. Если 23 января Пьер не солгал (родился 22 января), то 24 января – он солгал, а лгать он может только в свой день рождения. Противоречие.

Следовательно, он солгал 23 января – в свой день рождения.

Если Джон сказал правду 24 января (родился 25 января), то 23 января он солгал, а лгать он может только в свой день рождения. Противоречие, следовательно, он солгал 24 января.

9.16. В опросе участвовали 50 лжецов. В результате опроса получено 150 положительных ответов. Рыцарь отвечает положительно один раз (про свою партию), а лжец – два раза (про те, в которых не состоит). Если бы все опрошенные были рыцарями, то было бы получено ровно 100 положительных ответов. Значит 50 «лишних» ответов дали лжецы.

10.10. Ответ: 7 участников.

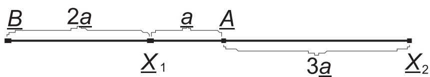
Заметим, что остальные 10 участников вместе решили 41 задачу. Если все 5 задач решили 8 участника, то остальные 2 вместе решили 1 задачу, что противоречит условию. Следовательно, все задачи решили 7 участников.

10.14. Маша выпила 1 чашку молока и 1 чашку кофе.

11.5. Ответ: 2 км/ч. Шляпа за полчаса проплыла 1 км.

11.15. Ответ: 17.15 или 17.45.

«Мысленно» развернем дороги так, чтобы велосипедисты ехали по одной дороге и в одну сторону, что не изменит смысла задачи. Тогда расстояние между автомобилями в период от 17.00 до 18.00 постоянно. Будем считать, что автомобили неподвижны, а перекресток движется. На рисунке автомобили Андрей и Виктор. Тогда на дороге существует две точки и такие, что $BX_1 = 2X_1A$ и $BX_2 = 2X_2A$. В зависимости от направления «движения» перекрестка от X_1 к X_2 или наоборот, получим ответы: 17.15 или 17.45.



12.14. Ответ: 32,5%. В Москве через год цены на жилье составят 80% в рублях и 60% в евро от нынешних цен. Следовательно, цена самого евро в рублях изменится в 3/4 раз. В Сочи цена квартиры в рублях будет составлять 90%, а в евро – 90% × 3/4 = 67,5% от нынешней цены. Следовательно, она уменьшится на 32,5%.

12.22. Ответ: да. Например, 988888888890.

14.16. Ответ: 5 карточек.

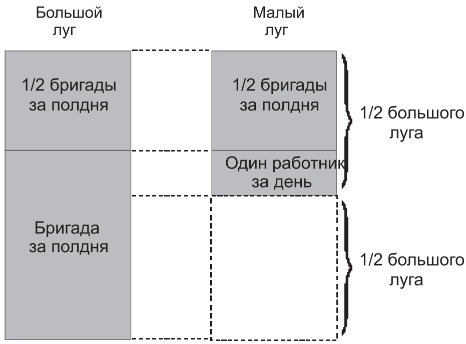
Четырех карточек недостаточно. Пример: 1, 3, 4 и 7.

Докажем, что 5 карточек хватит.

Если среди наших карточек есть число 0 или 9, тогда мы можем получить либо 0 либо 9. Если же эти карточек нет, то оставшиеся карточки разобьем на пары: 1 и 8, 2 и 7, 3 и 6, 4 и 5. Пар 4, а карточек 5. Следовательно, среди выбранных карточек, найдутся две из одной пары.

13.6. Ответ: 8 человек.

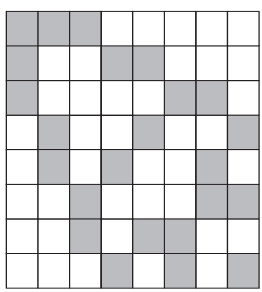
Пусть в артели K косцов. Тогда за первую половину дня они скосили поле площадью Ka (a – площадь, скашиваемая одним косцом). За вторую половину дня на большом лугу было скошено $0{,}5Ka$, то есть площадь большего луга равна $1{,}5Ka$. Тогда площадь маленького луга равна $0{,}75Ka$, значит, площадь не скошенной его части составляет $0{,}25Ka$. Следовательно, 1 косец за день скашивает $0{,}25Ka$, а число косцов в бригаде можно найти, если 2Ка разделить на $0{,}25\ Ka$.



13.14. Ответ: 72%. Разделим мысленно бутыль на 100 частей («стаканов»), и последим за количеством чистого спирта в ней. В полной бутыли крепости a% содержится a «стаканов» спирта, следовательно, аппарат Труса вырабатывает 1 «стакан» спирта в час. То же верно и для двух других аппаратов. За 24 часа три аппарата выработают 72 «стакана» спирта, а крепость смеси будет 72%.

14.18. Ответ: 8 человек.

Если участников 9 или больше, то они решили не меньше 27 «человеко-задач». Следовательно, найдется задача, которую решили не меньше 4 человек. Значит, это четверо участников больше не могут иметь общих решенных задач, но каждый из них должен по условию решить еще 2 задачи, то есть должно найтись еще 8 различных задач, кроме первой выбранной. Противоречие. Следовательно, участников не больше восьми. Пример для 8 можно представлен в таблице, в которой столбцы соответствуют участникам, а строки – задачам.



15.12. Ответ: 191.

После каждого шага сумма чисел, записанных на доске, уменьшается на 1. Вначале было:

$$S = 1 + 2 + \ldots + 20 = \frac{20 \cdot 21}{2} = 210 .$$

После 19 шагов: 210 – 19 = 191.

15.19. Полуинвариант: сумма квадратов всех чисел.

Действительно:

$$\left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \left(b + \frac{a}{2}\right)^2 > a^2 + b^2$$

Эта величина увеличивается (хотя бы один раз), либо не изменяется, если одно из чисел равно 0). Следовательно, мы не сможем получить исходный набор чисел, что и требовалось доказать.

16.6. Ответ: нет.

Пятый понедельник – это 29 день, после первого понедельника. Аналогично, Пятый четверг – это 29 день, после первого четверга. Если месяц начинался с понедельника, то пятый четверг уже 32 число. Если месяц начинался с четверга, то – 33 число. Противоречие.

16.17. Ответ: нет. Григорианский календарь имеет период 400 лет (20871 неделю). Первым днем века могут быть: вторник (например, 1 января 1901 г.), понедельник (1 января 2001 г.), суббота (1 января 2101 г.), четверг (1 января 2201 г.). Далее цикл повторяется.

17.10. Ответ: 5 учеников.

Пусть в классе n учеников, их средний возраст p лет, а возраст учителя m лет. Тогда:

$$m = p + 24 \quad \text{и} \quad m = \frac{pn + m}{n + 1} + 20 .$$

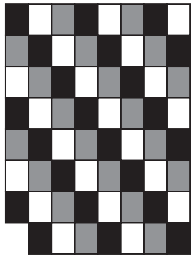
Получим: $m = \dfrac{pn + m}{n + 1} + 20$, $m(n+1) = pn + m + 20(n+1)$,

$$24n = 20(n+1),\ n = 5.$$

17.17. Пусть человек шел t час, тогда он прошел $12t$ км за $2t$ часов. Следовательно, его средняя скорость 6 км/час.

18.04. Ответ: нет.

Перекрасим шахматную доску.



Плитка 1 × 3 всегда покрывает три клетки разного цвета, но белых клеток – 21, черных – 22, серых – 20. Противоречие.

18.18. Обратим внимание на то, что конь при каждом своем ходе меняет цвет клетки, на которой стоит. Так как одна клетка занята пешкой, ему надо сделать 63 хода и оказаться на исходной клетке, что невозможно.

19.1. Верно. Среди 2 001 числа обязательно есть положительное. Остальные числа можно разбить на четверки, в каждой из которых сумма положительна.

19.19. Ответ: $a > b$.

Перепишем условие задачи в виде: $b = -a^2 + 5a - 5$.

Выясним знак разности $(a - b)$. Получим:

$a - b = a + a^2 - 5a + 5 = (a - 2)^2 + 1 > 0$. Следовательно, $a > b$.

20.8. Ответ: 23 человека. Две девочки составляют менее 9% участников кружка, так что 1% составляет более чем 2/9 человека, а 100% – более 200/9, то есть не менее 23 человек.

20.9. Отметим те участки, на которых количество коз увеличилось в 7 раз. Пусть до полудня там было x коз, после полудня стало $3x$. На остальных было $150 - x$, стало $150 - 7x$. Из условия $150 - x = 7(150 - 7x)$, откуда $48x = 900$, что невозможно.

21.2. а) Ответ: 0. Пусть $2378 = a$, тогда

$$2379\cdot 23782378 - 2378\cdot 23792379 = (a+1)(10000a + a) - a(10000(a+1) + a + 1) =$$

$$a(a+1)\cdot 10001 - a(a+1)\cdot 10001 = 0.$$

21.19. Преобразуем выражение

$$1\underbrace{0\ldots0}_{n\text{ цифр}}3\underbrace{0\ldots0}_{n\text{ цифр}}3\underbrace{0\ldots0}_{n\text{ цифр}}1 = 10^{3n+3} + 3\cdot 10^{2n+2} + 3\cdot 10^{n+1} = (10^{n+1}+1)^3.$$

22.7. Предположим, требуемого уголка нет. Тогда в каждом квадратике 2×2 не менее двух испорченных клеток. Тогда в выделенном квадрате не менее 8 испорченных клеток, а вне его не более 1 испорченной клетки.

Аналогично во втором квадрате. Следовательно, в «ободке» на не более двух выделенных клеток. А в нем четыре уголка.

	×	×	×	×
	×	×	×	×
	×	×	×	×
	×	×	×	×

×	×	×	×	
×	×	×	×	
×	×	×	×	
×	×	×	×	

	×	×	×	
	×	×	×	
	×	×	×	

22.14. Ответ: нет. У равностороннего треугольника три вершины, которые покрыть двумя меньшими равносторонними треугольниками нельзя.

23.7. Если Иван-царевич выберет числа $a = 1$, $b = 10$, $c = 100$, то Кощей сам сообщит ему задуманные цифры.

23.9. Ответ: 2 дня. В первый день полицейский должен собрать и опросить всех свидетелей. В результате опроса он получит не менее двух вариантов ответов. Так как рыцари, говорящие только правду будут единодушны, а лжецы могут обманывать, как вздумается, в том числе дать одинаковый ложный ответ. По результатам опроса следует разбить всех свидетелей на группы, причем в одну группу входят люди, давшие одинаковый ответ.

Пусть в результате опроса получилось несколько групп, но лишь одну из них будут составлять рыцари. Во второй день полицейскому следует выбрать по одному представителю из каждой группы, и тот, кто на вопрос о количестве присутствующих рыцарей даст ответ «один», будет представителем группы рыцарей.

24.13. Ответ: Нет, нельзя.

Решение. Предположим, нам это удалось.

Раскрасим квадрат как шахматную доску.

Тогда и черных и белых клеток – 50. Если мы будем раскрашивать по такому же принципу фигуры тетриса, то в каждой из фигур, кроме фигуры вида «Т», две клетки будут черными и две белыми, всего 40 белых и 40 черных клеток. У фигуры вида «Т» всегда 3 клетки одного цвета, а 1 – другого, поэтому в

5 фигурах этого вида количество клеток каждого цвета будет нечетным. А для того, чтобы сложить квадрат, необходимо, чтобы в 5 фигурах вида «Т» было по 10 клеток каждого цвета.

24.19. Ответ: нет.

Предположим, что такая перекраска удалась. Тогда окончательная раскраска снова станет шахматной, то есть соседние клетки будут разного цвета. Рассмотрим клетку, перекрашенную последней. Пусть, например, она белая, а надо перекрасить ее в черный цвет. Но к этому моменту все соседние с ней клетки уже перекрашены в белый цвет. Значит, не найдется соседней клетки, которая могла бы «передать» нашей черную раскраску.

25.13. Ответ: выигрывает первый.

Разобьем все числа на 5 групп, в соответствие с остатками при делении на 5:

Остаток	**Числа**					
0	5	10	15	20	25	
1	1	6	11	16	21	26
2	2	7	12	17	22	27
3	3	8	13	18	23	
4	4	9	14	19	24	

Стратегия: первым ходом берем число с остатком 2. Если соперник своим ходом берет число с любым остатком кроме 0, выбираем число так, чтобы сумма остатков равнялась 5.

25.18. Если в связке 4 сосиски, то проигрывает тот, чей ход.

Действительно, если он своим ходом берет 1 сосиску, противник берет 3; если берет 3 сосиски, то противник берет 1 сосиску, если – 2, то противник берет 1 сосиску и первый проигрывает – у него нет хода.

Если в связке 8 сосисок, то тоже проигрывает тот, чей ход. Действительно, если он своим ходом берет 1 сосиску, противник берет 3; если берет 3 сосиски, то противник берет 1, если – 2, то противник берет 3 и выигрывает. И так далее.

26.3. Ответ: с Андреем, Борисом и Геной.

1) Андрей сыграл шесть партий – то есть со всеми остальными участниками турнира, в том числе с Васей.

2) Следовательно, в турнире «без Андрея», Борис сыграл 4 партии, Вася и Гена – по 2 партии, Дима и Женя – по одной, а Захар ни одной.

3) Получается, что Борис сыграл со всеми участниками кроме Захара (и с Васей в том числе), а в турнире «без Андрея, Бориса и Захара», Вася и Гена – по 1 партии, Дима и Женя – ни одной.

4) Следовательно, Вася и Гена играли между собой.

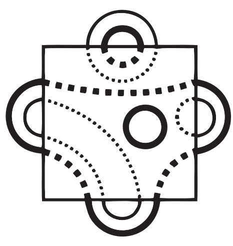
26.7. Нет. Отметим, что общее количество побед всех участников, равно общему количеству поражений всех участников и (по условию задачи) количеству матчей, сыгранных вничью. Следовательно, должно быть кратно 3. Противоречие.

27.8. Среди $k + 1$ машины найдется одна, способная доехать до следующей машины. Далее она сливает весь бензин в нее и на дороге остается машин.

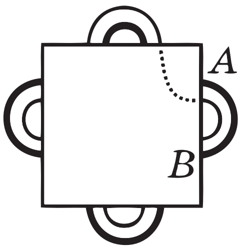
27.16. Предположим, что для любого острова из k стран все доказано. Рассмотрим остров, в котором $k + 1$ страна треугольной формы. Временно закроем на карте страну, которая находится на берегу моря, то есть одна или две стороны треугольника-границы этой страны граничат с морем. Оставшиеся k стран можно, в силу предположения, раскрасить в 3 цвета так, чтобы соседние страны имели разные цвета. Раскрасим эти k стран и откроем последнюю страну. Так как одна или 2 стороны треугольника-границы граничили с морем, то наша страна граничит максимум с двумя странами, то есть страну, покрасить можно.

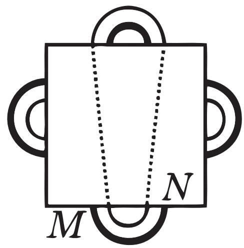
28.3. Уравнение $|x - 1| + |x - 2| = 1$ определяет множество точек, сумма расстояний от которых до точек с координатами 1 и 2 равно 1. Искомое множество отрезок [1; 2].

28.15. Ответ: полностью закрыт медный контур. Докажем, что полностью закрытым может быть только медный контур. Заметим, что алюминиевый контур, часть которого расположена сверху листа, пересекает только одну сторону листа (верхнюю), не соединяясь с другими видимыми частями проволоки (будем называть такие контуры «односторонними»).



Предположим, что верхний алюминиевый контур соединен с боковым. Тогда точки бокового медного контура (A и B) лежат в частях разделенных алюминиевым контуром; медный контур пересекает алюминиевый, что противоречит условию задачи. Если верхний алюминиевый контур соединен с нижним, тогда концы нижнего медного контура (M и N) лежат в частях разделенных алюминиевым контуром; медный контур пересекает алюминиевый, что противоречит условию задачи. Значит, верхний алюминиевый контур «односторонний», а, следовательно «односторонним» является и верхний медный контур.





Докажем, что оставшиеся три видимые части медной проволоки составляют один контур. Если все эти части – «односторонние», то образуется четыре различных медных контура, что невозможно. Предположим, что две части медной проволоки соединены между собой, а третья часть образует «односторонний» контур. Тогда соединены и соответствующие части алюминиевого контура, и оставшийся алюминиевый контур «односторонний». Но в таком случае, видны части всех шесть контуров, что противоречит условию задачи. Значит, два боковых и нижний куски медной проволоки образуют один контур. 3. Так как видны части двух медных контуров, то третий медный контур полностью скрыт.

29.11. Ответ: 15 384. Пусть x – искомое число. Если 6 приписать слева, то получится $600\,000 + x$, если справа, то – $10x + 6$. Осталось решить уравнение $600\,000 + x = 4(10x + 6)$.

29.15. Ответ: за 365 дней. Пусть объем озера – V литров, слон выпивает в день C л воды, а из ключей в озеро попадает K л в день. Тогда выполняются равенства:

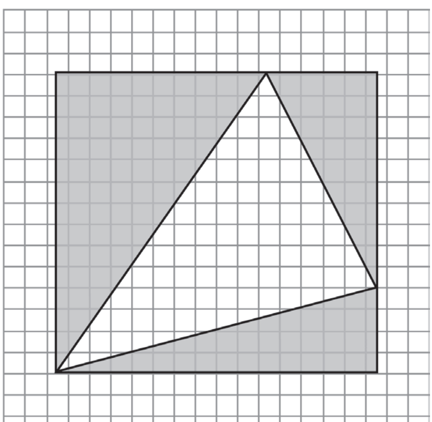
$183C = V + K$ и $35C = V + 5K$, откуда $C = 2K$ и $V = 365K$.

Пусть один слон выпивает озеро за t дней. Тогда: $tc = V + tK$, или $2Kt = 365K + Kt$, откуда $t = 365$.

30.5. Ответ: 25 кг алмазов и 75 кг золота. В этом случае он заработает 3000 динаров. Докажем, что больше заработать невозможно. Вначале заметим, что 5 кг золота имеют тот же объем, что и 1 кг алмазов, но стоят дороже. Докажем теперь, что 3000 динаров – это наибольшая сумма, которую можно выручить за сокровища. Если из мешка содержащего 25 кг алмазов и 75 кг золота убрать часть алмазов, то заменить их будет можно таким же количеством золота (по весу) – общая стоимость уменьшится, так как алмазы стоят дороже. Если же убрать часть золота, то общая стоимость уменьшится, так как вес взятых вместо него алмазов будет в пять раз меньше (иначе – превышение по объему!). Например, если взять 5 x кг золота и заменить их на x кг алмазов, то стоимость сокровищ уменьшится на $40x$ динаров.

30.10. Ответ: 1 166 666. Будем измерять стоимость кефира в «твердой валюте» – пустых бутылках. Это возможно потому, что отношение цены кефира и пустой бутылки не изменяется. То есть, 7 000 000 руб. Гулливера соответствуют 7 000 000 пустым бутылкам, что соответствует стоимости 1 166 666 бутылок кефира (без тары). Последние 4 бутылки использовать не удастся.

31.2. Указание. Площадь треугольника может быть вычислена как разность площади четырехугольника и площадей трех прямоугольного треугольника. Площадь прямоугольного треугольника равна половине площади соответствующего прямоугольника.



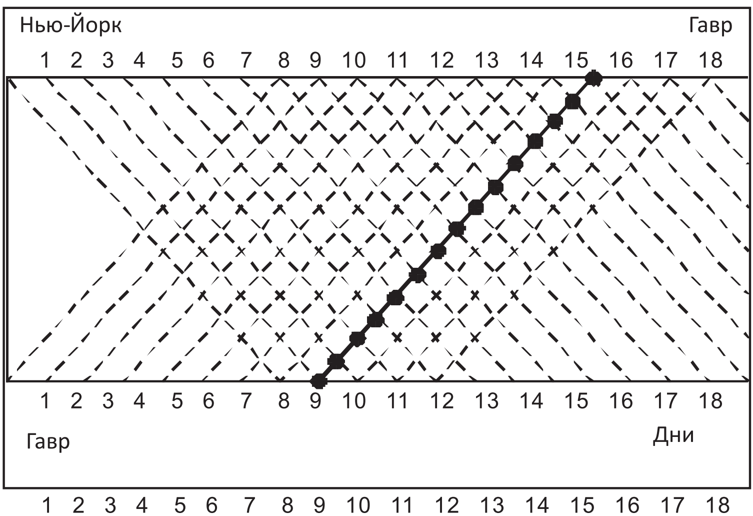
31.8. Площадь треугольника полуцелое число. С другой стороны площадь правильного треугольника может быть вычислена по формуле $S = \frac{\sqrt{3}a^2}{4}$ и получится число иррациональное.

33.2. Пусть *f(n)* равна разности количества правых и левых сапог среди сапог с номерами от $n - 9$ до n (то есть в десяти подряд идущих сапогах, начиная с $n - 9$). Эта функция определена при четных значениях $10 \le n \le 30$.

Кроме того: *f(10)* + *f(20)* + *f(30)* = 0 (левых и правых сапог поровну).

Тогда: 1) либо *f(n)* принимает значение 0, что и требовалось доказать; 2) либо она принимает как положительные, так и отрицательные значения и из соображений непрерывности, она принимает также значение 0.

33.9. Решение понятно из рисунка.



34.2. Нет. Для того чтобы добиться требуемого необходимо передвинуть шашки 1 + 2 + ... + 9 = 45 раз, а мы согласно условию задачи каждый раз передвигаем по две шашки.

34.14. Периметр заросшей части изначально не больше, чем 36. Зарастание бурьяном участка поля при указанных условиях не увеличивает периметр заросшей части, поэтому периметр не может стать равным 40 (периметр всего поля).

34.17. Ответ: нет. Пронумеруем деревья по кругу. Сумма номеров деревьев, на которых сидят чижи, при каждом перелете либо не изменяется, либо изменяется на 44. Тем самым, сохраняется остаток от деления этой суммы номеров на 44. Изначально этот остаток равен 22, а если все чижи усядутся на одно дерево, то он будет равен нулю. Поэтому, на одном дереве чижи собраться не смогут.

35.3. Пусть $f(x) = (x + 1)(x + 2)(x + 3) \ldots (x + 10)$.

Тогда искомая сумма равна $f(x) = (1 + 1)(1 + 2)(1 + 3) \ldots (1 + 10)$.

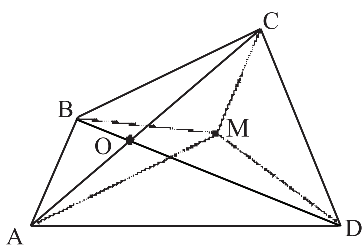
35.12. Поскольку выиграть у сильного шахматиста ему необходимо здравый смысл подсказывает, что ему желательно сыграть с ним два раза.

Вероятность добиться успеха в указанном случае:

$P_1 = ab + (1 - a)ab = 2ab - a^2b$, где a – вероятность выиграть у сильного шахматиста, a b – вероятность выиграть у слабого шахматиста, причем $a < b$. В другом случае:

$P_2 = ab + (1 - b)ab = 2ab - ab^2$. Вероятность P_1 больше, так как $P_1 - P_2 = 2ab - a^2b - 2ba + b^2a = ab(b - a) > 0$.

36.8. Колодец следует вырыть в точке пересечения диагоналей четырехугольника: расстояние от любой другой точки M больше (см. нижеследующий рис.).



36.14. Требуется нанести 4 деления. Докажем, что трех делений мало. Действительно, три деления вместе с краями линейки определяют пять точек, которые в свою очередь определяют 10 отрезков, а нам требуется уметь измерять 13 отрезков. Четырех делений достаточно. Например, если отметить деления 1 см, 6 см, 9 см, 11 см.

Литература

1. *Акулич И. Ф.* Королевские прогулки. – М.: Бюро Квантум, 2008.
2. *Башмаков М. И.* Математика в кармане «Кенгуру». Международные олимпиады школьников. – М.: Дрофа, 2010.
3. *Бахтина Т.П.* Раз задачка, два задачка. – Минск: Асар, 2001.
4. *Босс В.* Интуиция и математика. – М.: Айрис пресс, 2003.
5. *Болтянский В. Г., Савин А. П.* Беседы о математике: Книга 1. Дискретные объекты. – М.: Фима, МЦНМО, 2002.
6. *Галкин Е. В.* Задачи с целыми числами. 7–11 классы. – М.: Просвещение, 2012.
7. *Гарднер М.* Классические головоломки. – М.: АСТ, 2007.
8. *Гарднер М.* Лучшие математические игры и головоломки. – М.: АСТ, 2008.
9. *Гарднер М.* Новые математические развлечения. – М.: АСТ, 2008.
10. *Гарднер М.* Нескучная математика. – М.: АСТ, 2009.
11. *Гарднер М.* 1000 развивающих головоломок, математических загадок и ребусов для детей и взрослых». – М.: АСТ, 2009.
12. *Горбачев Н. В.* Сборник олимпиадных задач по математике. – М.: МЦНМО, 2004.
13. *Горячев Д., Воронец А.* Задачи, вопросы и софизмы для любителей математики. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000.
14. *Егоров А. А., Раббот Ж. М.* Олимпиады «Интеллектуальный марафон» – М.: Бюро Квантум, 2006.
16. *Екимова М. А., Кукин Г. П.* Задачи на разрезание. – М.: МЦНМО, 2007.
17. *Жуков А. В., Самовол П. И., Аппельбаум М. В.* Элегантная математика. Задачи и решения: учебное пособие. – М.: КомКнига, 2005.
18. *Кноп К.* Взвешивания и алгоритмы: от головоломок к задачам. – М.: МЦНМО, 2011.

19. *Кузьмин О. В.* Комбинаторные методы решения логических задач. – М.: Дрофа, 2006.
20. *Левитас Г. Г.* Нестандартные задачи по математике в 7–11 классах. – М.: Илекса, 2007.
21. *Левитас Г. Г.* Нестандартные задачи по математике для детей и родителей. – М.: Илекса, 2009.
22. *Мадера А. Г., Мадера Д.А.* Математические софизмы: Правдоподобные рассуждения, приводящие к ошибочным утверждениям. – М.: Просвещение, 2003.
23. *Медников Л. Э.* Четность. – М.: МЦНМО, 2011.
24. *Медников Л. Э., Шаповалов А. В.* Турнир городов. Мир математики в зжадачах. – М.: МЦНМО, 2012.
25. *Петров Н. Н.* Математические игры. – М.: Книжный дом «Либроком», 2012.
26. *Романовский В. И.* Арифметика помогает алгебре. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007.
27. *Сгибнев А. Г.* Делимость и простые числа. – М.: МЦНМО, 2012.
28. *Смаллиан Р.* Как же называется эта книга? – М.: Мир, 1981. (есть более поздние издания).
29. *Смаллиан Р.* Принцесса или тигр? – М.: ИД Мещерякова, 2009.
30. Смаллиан Р. Приключения Алисы в Стране Головоломок. – М.: «Просвещение», 2008.
31. *Спивак А. В.* Тысяча и одна задача по математике. – М.: Просвещение, 2002.
32. *Федин С. Н.* (автор-составитель). Математики тоже шутят. – М.: Книжный дом «Либроком», 2009.
33. *Фридман Л. М.* Сюжетные задачи по математике. История, теория и методика. Учеб. пос. для учителей и студентов педвузов и колледжей. – М.: Школьная пресса, 2002.
34. *Чулков П. В.* Арифметические задачи. – М.: МЦНМО, 2009.
35. *Шарыгин И. Ф.* Математический винегрет. – М.: Мир, 2002.

36. *Шевкин А. В.* Текстовые задачи по математике. 7-11 классы. – М.: ИЛЕКСА, 2011.
37. *Шевкин А. В.* Текстовые задачи по математике. 5–6 классы. – М.: ИЛЕКСА, 2011.
38. *Шень А. Х.* Игры и стратегии с точки зрения математики. – М.: МЦНМО, 2007.
39. *Шень А. Х.* Вероятность: примеры и задачи. – М.: МЦНМО, 2007.
40. *Шень А. Х.* Простые и составные числа. – М.: МЦНМО, 2005.
41. *Ященко И. В.* Приглашение на Математический праздник. – 2-е изд., доп. – М.: МЦНМО, 2005.

Павел Викторович Чулков

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ ПО ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКЕ

(2-й курс)

Учебное пособие

Издательство «Прометей»
115035, Москва, ул. Садовническая, д.72, стр.1,
Тел/факс: 8 (495) 799-54-29
E-mail: info@prometej.su

Подписано в печать 23.07.2012.
Формат 60x90/16. Объем 6,38 п.л.
Тираж 500 экз. Заказ № 243.

ISBN 978-5-4263-0121-4

9 785426 301214